Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019 – 2020 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019 – 2020 учебном году
9 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

9.1. *В супермаркете продаются фруктовые наборы двух видов. Набор первого вида состоит из 3 яблок и 15 апельсинов и стоит 360 рублей. Набор второго вида состоит из 20 яблок и 5 апельсинов и стоит 500 рублей. Фрукты продаются только в наборах, делить наборы на части нельзя. Серёжа пришел в супермаркет и хочет купить одинаковое количество яблок и апельсинов. Какую наименьшую сумму ему придется потратить, если уйти, ничего не купив, Серёжа не может?*

Решение: Пусть Серёжа купил x наборов первого вида и y наборов второго. Тогда он купил $3x+20y$ яблок и $15x+5y$ апельсинов. Из условия задачи следует, что эти числа равны, то есть, $15y=12x$ или $5y=4x$. Чем меньше y, тем меньше и x, и тем меньше уплаченная сумма. Наименьшее натуральное y — это 4, тогда $x=5$, а затраченная сумма в рублях равна $5\cdot 360+4\cdot 500=3800$.

Ответ: 3800 рублей.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за ошибок в арифметике	6 баллов
Показано, что суммой 3800 рублей обойтись можно, но не показано, что нельзя обойтись меньшим числом рублей	2 балла
Примеры покупок, стоящих более 3800 рублей	0 баллов

9.2. *Пусть x, y и z — отличные от нуля действительные числа, удовлетворяющие равенствам: $\frac{x+y}{z}=\frac{y+z}{x}=\frac{z+x}{y}$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$. Обоснуйте, что других значений быть не может.*

Решение: Пусть $S=x+y+z$. Тогда $\frac{x+y}{z}=\frac{S-z}{z}=\frac{S}{z}-1$, $\frac{y+z}{x}=\frac{S}{x}-1$, $\frac{z+x}{y}=\frac{S}{y}-1$, и условие сводится к равенству: $\frac{S}{z}=\frac{S}{y}=\frac{S}{x}$. Отсюда либо $x=y=z$, и тогда искомое выражение равно 8, либо $S=0$, и тогда оно равно

$\left(\dfrac{S-x}{x}\right)\left(\dfrac{S-y}{y}\right)\left(\dfrac{S-z}{z}\right) = -1$. Обе ситуации возможны: например, первая при $x = y = z = 1$, вторая — при $x = y = 1$, $z = -2$.

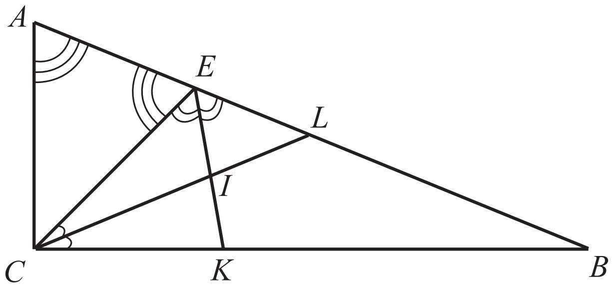
Ответ: 8 или -1.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Обосновано, что возможны только значения 8 и -1, но не приведены примеры, показывающие, что оба этих значения достигаются	6 баллов
Верно найдены оба возможных значения 8 и -1 и не показано, что нет других	2 балла
Верно найдено одно из возможных значений 8 или -1	1 балл

9.3. *В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB выбрана точка E так, что $AC = CE$. Биссектрисы CL и EK треугольника BCE пересекаются в точке I. Известно, что треугольник IKC равнобедренный. Найдите отношение $CL : AB$.*

Решение: Угол B должен быть меньше угла A, иначе на гипотенузе AB не найдётся точки E со свойством $AC = CE$. Пусть $\angle B = \beta$. Пусть, кроме того, $\angle ECB = \gamma$, а $\angle CEB = \delta$. Ясно, что $\beta + \gamma + \delta = 180°$. Выполнены равенства $\angle CAE = 90° - \beta$, а $\angle CEA = 180° - \delta$. Так как эти углы равны (в силу равенства сторон AC и CE треугольника ACE), имеем равенство $\delta = 90° + \beta$,



К решению задачи 9.3

откуда $2\beta + \gamma = 90°$. Из треугольника BEC легко находятся углы треугольника CIK: $\angle ICK = \gamma/2$, $\angle CKI = \delta/2 + \beta$, $\angle KIC = \gamma/2 + \delta/2$. Среди этих углов есть два равных. Равенство $\angle ICK = \angle KIC$ невозможно, так как $\delta > 0$. Равенство $\angle ICK = \angle CKI$ приводит к уравнению

$$\gamma/2 = \delta/2 + \beta, \quad \gamma = \delta + 2\beta = 90° + 3\beta = \gamma + 5\beta,$$

противоречие. Остаётся единственное: $\angle CIK = \angle CKI$, что эквивалентно равенству $\beta = \gamma/2$. Но тогда треугольник LCB — равнобедренный, $CL = LB$ и по свойству прямоугольного треугольника точка L — середина его гипотенузы. Тогда $CL : AB = 0{,}5$.

Заметим, что углы $\triangle ABC$ находятся однозначно: $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 22{,}5^\circ$, $\angle A = 67{,}5^\circ$. Это означает, что описанная конструкция существует.

Ответ: $CL : AB = 0{,}5$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Нет доказательства существования конструкции, о которой говорится в задаче	баллы не снижать
Решение верно, за исключением того, что не обосновано, какие именно стороны треугольника IKC равны	5 баллов
Верный ответ, подкреплённый верным примером треугольника, без доказательства его единственности	3 балла
Верно обоснована невозможность обоих равенств 1) $CI = IK$ и 2) $CK = IK$	2 балла
Верно обоснована невозможность только одного равенства (см. предыдущий пункт)	1 балл
Верный ответ без обоснования	0 баллов

9.4. *На гранях кубика расставлены шесть различных натуральных чисел от* 6 *до* 11*. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна* 36*, во второй раз —* 33*. Какое число написано на грани, противоположной той, где написано число* 10*? Ответ обоснуйте.*

Решение: Сумма чисел на всех 6 гранях кубика равна 51. Поэтому сумма чисел на верхней и нижней гранях при первом броске равняется 15, при втором — 18. Число 15 может быть получено (как сумма двух различных целых чисел из отрезка $[6; 11]$) двумя способами: $15 = 9 + 6 = 8 + 7$. Число 18 тоже двумя: $18 = 7 + 11 = 8 + 10$. Если числа 7 и 8 лежат на противоположных гранях, то оба последних представления невозможны. Значит, из двух указанных представления числа 15 имеет место первое, и в кубике против числа 9 лежит число 6. Теперь, если при втором броске на верхней и нижней гранях были числа 8 и 10, то ясно, что против 10 лежит 8. А если при втором броске на верхней и нижней гранях были числа 7 и 11, то на одной паре противоположных боковых сторон числа 6 и 9, а на второй — оставшиеся 8 и 10, и снова против числа 10 лежит число 8.

Ответ: 8.

Примечание: Задача может быть легко сведена к обычному игральному кубику следующим образом: уберём с каждой грани по 5 точек. Тогда кубик станет обычным, а условие примет вид: «В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна 16, во второй раз — 13. Какое число написано на грани, противоположной той, где написано число 5?». Дальнейшие рассуждения принципиально не меняются.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верный ответ, подкреплённый верным примером кубика (любым из двух возможных)	3 балла
Обоснована невозможность некоторых ситуаций (например, что против 10 не может лежать 11 или что сумма при первом броске не реализуется как $6+9+10+11$), но не все невозможные ситуации проанализированы	2 балла
Задача верно сведена к обычному кубику	1 балл
Ответ без обоснования (или неверный ответ)	0 баллов

9.5. *Докажите, что*

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{97}\cdot\frac{100}{99}>10.$$

Решение: Пусть

$$A=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{97}\cdot\frac{100}{99},\quad B=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{97}{96}\cdot\frac{99}{98}.$$

Тогда

$$AB=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{98}\cdot\frac{100}{99}=100.$$

Кроме того, $A>B>0$. Действительно, $\frac{99}{98}<\frac{98}{97}$, $\frac{97}{96}<\frac{96}{95}$ и т. д. до $\frac{5}{4}<\frac{4}{3}$. Наконец, $\frac{3}{2}<\frac{2}{1}\cdot\frac{100}{99}$ и после умножения левых и правых частей этих 49 неравенств получаем $B<A$. Тогда $100=AB<A^2$, поэтому $A>10$, ч. т. д.

Рекомендации по проверке:

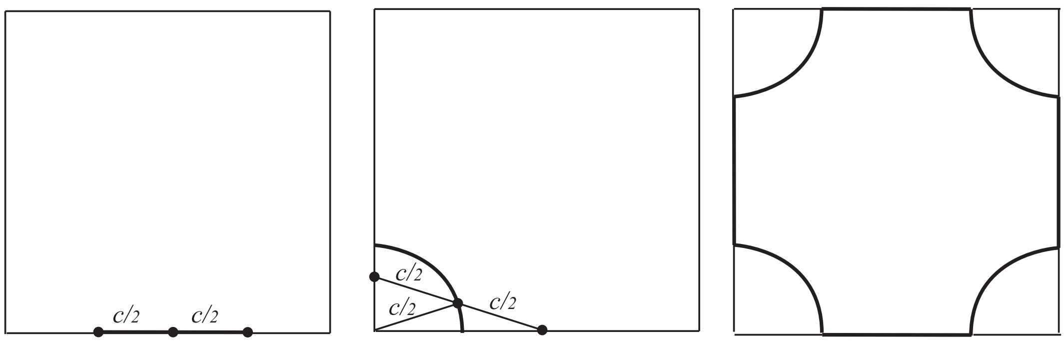
есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
При верном ходе решения доказательство неравенства $A > B$ содержит неточности	4 балла
Имеется не доведённая до решения идея рассмотрения выражения $B = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{97}{96} \cdot \frac{99}{98}$	3 балла
Любые выкладки, не приведшие к доказательству (в том числе неудачная попытка использования математической индукции)	0 баллов

9.6. *Дан квадрат с длиной стороны* 1 *и некоторое число* c $(0 < c \leqslant \sqrt{2})$. *Найдите геометрическое место точек — середин отрезков длины* c, *концы которых лежат на сторонах данного квадрата.*

Решение: Возможно две принципиально различные ситуации, каждая из которых имеет два подслучая.

Случай 1. $0 < c < 1$.

1а) Концы отрезка лежат на одной стороне. Тогда и середина его лежит на этой же стороне. Получаем на этой стороне отрезок, концы которого удалены от углов квадрата на расстояние $c/2$ (см. рисунок слева). Ясно, что каждая из точек этого отрезка реализуема, как середина отрезка длины c.



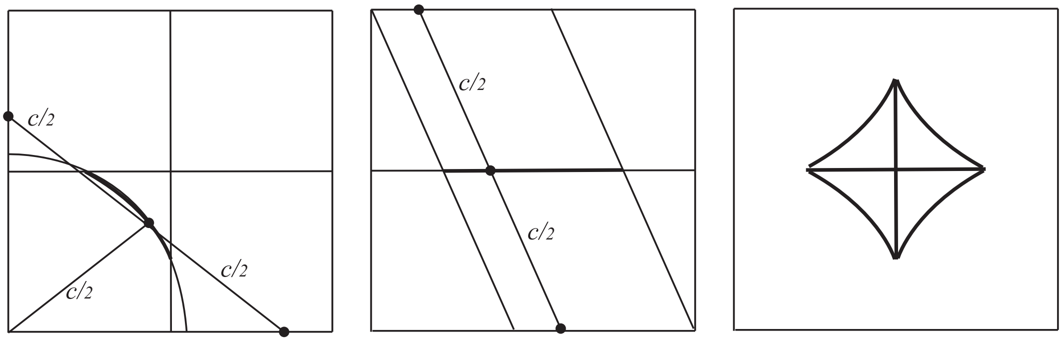
К решению задачи 9.6. Случай 1

1б) Концы отрезка лежат на смежных сторонах квадрата. Тогда середина отрезка находится внутри квадрата, и удалена от общей вершины сторон на расстояние $c/2$. Последнее означает, что она лежит на окружности радиуса $c/2$ с центром в этой общей вершине. Так как для любой точки этой окружности, лежащей внутри квадрата, нужный отрезок найдётся (достаточно построить два равнобедренный треугольника, как на рисунке в центре), получаем четыре дуги окружностей с центрами в углах квадрата. Заметим, что эти дуги не пересекаются между собой, а их концы совпадают с концами отрезков из пункта 1а.

Окончательно имеем множество, состоящее из четырёх дуг радиуса $c/2$ величины 90° и четыре отрезка, соединяющие концы соседних дуг — см. рисунок справа.

Случай 2. $1 \leqslant c \leqslant \sqrt{2}$.

2а) Концы отрезка лежат на смежных сторонах квадрата. Как и в случае 1б, получаем дуги четырёх окружностей. Но дуги эти поменьше, ограничиваются средними линиями квадрата (см. рисунок слева). Причина в том, что середина отрезка, концы которого лежат, скажем, на левой и нижней сторонах квадрата, находится левее и ниже середины квадрата, в чём легко убедиться. Как и в случае 1б, для всякой точки такой дуги отрезок длины c с концами на сторонах квадрата и центром в этой точке, строится.



К решению задачи 9.6. Случай 2

2б) Концы отрезка лежат на противоположных сторонах квадрата. Тогда середина отрезка лежит на средней линии квадрата, параллельной этим сторонам. Эти середины заполнят целиком некоторый отрезок средней линии. Концы этого отрезка определяются предельными положениями отрезка длины c — см. рисунок в центре. Они равноудалены от двух смежных углов квадрата и потому являются концами дуг окружностей, о которых говорилось в пункте 2а.

В результате геометрическое место точек представляет собой криволинейный четырёхугольник, в котором проведены диагонали (см. рисунок справа). Ещё уместно отметить, что при $c = 1$ он достигнет границ квадрата и будет представлять собой обе его средние линии плюс четыре четвертинки окружностей; при $c = \sqrt{2}$ четырёхугольник выродится в точку — центр квадрата.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верно и обоснованно найдено искомое ГМТ в обоих принципиальных случаях $c < 1$ и $c > 1$	7 баллов
Отдельно не рассмотрены предельные случаи $c = 1$ и $c = \sqrt{2}$	6 баллов
Верный ответ получен в обоих случаях $0 < c < 1$ и $1 < c < \sqrt{2}$, но обоснование не полно: либо не доказано, что не подходят другие точки, либо не показано, что ЛЮБАЯ точка ответа подходит	4 балла
Верно проанализирован один из случаев $0 < c < 1$ и $1 < c < \sqrt{2}$	3 балла
Верно рассмотрены только предельные случаи $c = 1$ и $c = \sqrt{2}$ (хотя бы один из них)	1 балл