Уважаемый участник Олимпиады!

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

Максимальная оценка — 35 баллов.

Время на выполнение заданий — 4 часа.

Желаем вам успеха!

6.1. Трёхзначное число в 56 раз больше своей последней цифры. Во сколько раз оно больше своей первой цифры? Ответ обоснуйте.

6.2. Отметьте на плоскости 6 различных точек и проведите 6 прямых так, чтобы и на каждой прямой, и по обе стороны от неё было по две отмеченных точки.

6.3. По дороге из города A в город B через каждый километр стоят километровые столбы. На каждом столбе с одной стороны написано расстояние до A, а с другой — расстояние до B. Утром турист проходил мимо столба, на котором одно число было вдвое больше другого. Пройдя еще 10 км, турист увидел столб, на котором два числа отличались в три раза. Каково расстояние от A до B? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

6.4. Когда Винни-Пух пришел в гости к Кролику, он съел 3 тарелки мёда, 4 тарелки сгущёнки и 2 тарелки варенья, а после этого не смог выйти наружу из-за того, что сильно растолстел от такой еды. Но известно, что если бы он съел 2 тарелки мёда, 3 тарелки сгущёнки и 4 тарелки варенья или 4 тарелки мёда, 2 тарелки сгущёнки и 3 тарелки варенья, то спокойно смог бы покинуть нору гостеприимного Кролика.

От чего больше толстеют: от варенья или от сгущенки? Ответ обоснуйте.

6.5. 101 человек купили 212 воздушных шариков четырёх цветов, причём каждый из них купил хотя бы один шар, но при этом ни у кого не оказалось двух шаров одно цвета. Число людей, купивших 4 шара, на 13 больше числа людей, купивших 2 шара. Сколько человек купили только один шар? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

7.1. Алёна пригласила Серёжу в гости, сообщив, что живет в 10-м подъезде, в квартире №333, а этаж сказать забыла. Подходя к дому Алёны, Серёжа увидел, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему нужно подняться? В этом доме на каждом этаже каждого из подъездов одинаковое количество квартир; номера квартир начинаются с №1. Ответ обоснуйте.

7.2. На столе лежит деревянный треугольник с углами 70°, 70° и 40° и карандаш, а других приборов нет. На большом листе бумаги нужно нарисовать какой-нибудь равносторонний треугольник. Как это сделать? Разрешается несколько раз класть треугольник на бумагу и обводить карандашом его контур.

7.3. Валера, Серёжа и Дима получили за три контрольные работы каждый по три оценки, причём все оценки оказались тройками, четверками или пятёрками. Валера сказал: «У меня за две контрольные оценки больше, чем у Серёжи». Серёжа ответил: «Зато у меня за две контрольные оценки выше, чем у Димы». Дима парировал: «А я две контрольные написал лучше, чем Валера». Могли ли все мальчики говорить правду? Ответ обоснуйте.

7.4. У Кати волосы растут вдвое быстрей, чем она сама, а у Алёны, которая растёт со скоростью волос Кати, — в полтора раза быстрее, чем растёт Алёна. В настоящий момент у Алёны и у Кати одинаковая высота волос над полом. Чьи волосы раньше достигнут пола? Ответ обоснуйте.

7.5. Точка B лежит на отрезке AC, $AB = 2$, $BC = 1$. Укажите на прямой AC все точки M, для которых $AM + MB = CM$, и покажите, что других точек M с таким свойством нет.

8.1. Одуванчик утром распускается, этот и следующий день цветёт жёлтым, на третий день утром становится белым, а к вечеру облетает. Вчера днём на поляне было 20 жёлтых и 14 белых одуванчиков, а сегодня — 15 жёлтых и 11 белых. Сколько жёлтых одуванчиков было на поляне позавчера? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

8.2. Улитка ползёт с постоянной скоростью вокруг циферблата часов по окружности против часовой стрелки. Она стартовала в 12:00 с отметки 12 часов, и закончила полный круг ровно в 14:00 того же дня. Какое время показывали часы, когда улитка в ходе своего движения встречалась с минутной стрелкой? Ответ обоснуйте.

8.3. Внутри параллелограмма $ABCD$ взяли точку E так, что $CE = CB$. Пусть F и G — середины отрезков CD и AE соответственно. Докажите, что прямая FG перпендикулярна прямой BE.

8.4. Известно, что $abc = 1$. Вычислите сумму

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}.$$

8.5. За завтраком мама ежедневно дает Серёже или 1 бутерброд и 3 конфеты, или 2 бутерброда и 4 конфеты или 3 бутерброда и 5 конфет. Через несколько дней оказалось, что Серёжа съел ровно 100 бутербродов. Мог ли он при этом за то же время съесть ровно 166 конфет? Ответ обоснуйте.

8.6. На некотором отрезке отметили его концы и три внутренние точки. Оказалось, что все попарные расстояния между пятью отмеченными точками различны и выражаются целым числом сантиметров. Какова наименьшая возможная длина отрезка? Ответ обоснуйте.

9.1. В супермаркете продаются фруктовые наборы двух видов. Набор первого вида состоит из 3 яблок и 15 апельсинов и стоит 360 рублей. Набор второго вида состоит из 20 яблок и 5 апельсинов и стоит 500 рублей. Фрукты продаются только в наборах, делить наборы на части нельзя. Серёжа пришел в супермаркет и хочет купить одинаковое количество яблок и апельсинов. Какую наименьшую сумму ему придется потратить, если уйти, ничего не купив, Серёжа не может?

9.2. Пусть x, y и z — отличные от нуля действительные числа, удовлетворяющие равенствам: $\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y}$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$. Обоснуйте, что других значений быть не может.

9.3. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB выбрана точка E так, что $AC = CE$. Биссектрисы CL и EK треугольника BCE пересекаются в точке I. Известно, что треугольник IKC равнобедренный. Найдите отношение $CL : AB$.

9.4. На гранях кубика расставлены шесть различных натуральных чисел от 6 до 11. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна 36, во второй раз — 33. Какое число написано на грани, противоположной той, где написано число 10? Ответ обоснуйте.

9.5. Докажите, что

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{97} \cdot \frac{100}{99} > 10.$$

9.6. Дан квадрат с длиной стороны 1 и некоторое число c $(0 < c \leqslant \sqrt{2})$. Найдите геометрическое место точек — середин отрезков длины c, концы которых лежат на сторонах данного квадрата.

10.1. В конкурсе, в котором участвовало 5 человек, было несколько вопросов. На каждый вопрос один из участников дал неправильный ответ, а остальные — правильные. Число правильных ответов у Пети равно 10 — это меньше, чем у любого другого. Число правильных ответов у Васи равно 13 — это больше, чем у любого другого. Сколько вопросов было в конкурсе? Ответ обоснуйте.

10.2. Можно ли в выражении $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \frac{1}{5} * \frac{1}{6} * \frac{1}{7} * \frac{1}{8}$ вместо знаков $*$ так расставить знаки плюс и минус, чтобы модуль этого выражения стал меньше $\frac{1}{500}$?

10.3. Докажите, что при любом натуральном числе n и при любом действительном α имеет место двойное неравенство

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{n+\sin^2\alpha} + \frac{1}{n+2\sin^2\alpha} + \ldots + \frac{1}{n+(2n+1)\sin^2\alpha} \leqslant 3.$$

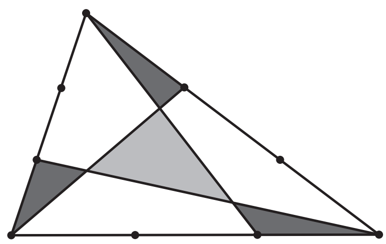
10.4. На плоскости проведены три попарно пересекающиеся прямые: l, p, q. С помощью циркуля и линейки постройте на прямых l и p соответственно точки A и B так, чтобы отрезок AB был перпендикулярен прямой q и делился этой прямой пополам. Определите, сколько решений имеет задача в зависимости от взаимного расположения прямых l, p, q?

10.5. Пусть $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1$. Найдите все значения, которые может принимать число $x+y$, и докажите, что других значений быть не может.

10.6. Точку внутри выпуклого пятиугольника соединили с его вершинами, в результате чего пятиугольник оказался разбитым на 5 равных между собой неравнобедренных треугольников. Докажите, что эти треугольники прямоугольные.

11.1. В каждую клетку квадрата 2×2 вставлено по числу. Все числа попарно различны, сумма чисел в первой строке равна сумме чисел во второй строке, а произведение чисел в первом столбце равно произведению чисел во втором столбце. Докажите, что сумма всех четырёх чисел равна нулю.

11.2. В городе Перпендикуляринске решили построить новые дома из нескольких этажей (некоторые из них могут быть и одноэтажными), но так, чтобы суммарное число этажей было равно 30. Архитектор города Параллельников предложил проект, согласно которому, если после постройки залезть на крышу каждого нового дома, сосчитать число более низких новых домов и сложить все такие числа, то полученная сумма будет максимально большой. Чему равна указанная сумма? Сколько при этом домов, и какой этажности предлагается построить?



К условию задачи 11.3

11.3. В этот раз пиццу испекли почему-то в форме неправильного треугольника и разрезали на 7 частей тремя прямолинейными разрезами, как указано на рисунке (каждый разрез проводился из вершины в точку, делящую сторону в отношении 1:2).

Билли, Вилли и Дилли взяли себе по треугольному кусочку с углов (они отмечены более тёмным цветом), а дядюшка Скрудж — треугольный кусочек из серёдки (светло-серый цвет). Докажите, что дядюшка Скрудж съел столько же пиццы, сколько все три его племянника вместе взятые.

11.4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} & = & \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}+1\right), \\ y\sqrt{1-x^2} & = & \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1\right). \end{cases}$$

11.5. В пространстве проведена прямая l и отмечена точка P, не лежащая на этой прямой. Найдите геометрическое место точек — проекций точки P на всевозможные плоскости, проходящие через прямую l.

11.6. Шериф считает, что если он поймал в некоторый день количество бандитов, которое является простым числом, то ему повезло. В понедельник и во вторник шерифу везло, а начиная со среды количество пойманных им бандитов было равно сумме позавчерашнего и удвоенного вчерашнего числа. Какое максимальное число дней подряд шерифу могло везти на этой неделе? Ответ обоснуйте.