Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019 – 2020 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019 – 2020 учебном году

6 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

6.1. *Трёхзначное число в 56 раз больше своей последней цифры. Во сколько раз оно больше своей первой цифры? Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. Последняя цифра такова, что при умножении её на 6 полученное число будет оканчиваться на неё же. Полным перебором убеждаемся, что это может быть любая чётная цифра (и только она). Значит, это трёхзначное число либо 112, либо 224, либо 336, либо 448 (вариант с последней цифрой 0 не годится, так как получится не трёхзначное число). Во всех ситуациях ответ 112.

Способ 2. Пусть число имеет вид $\overline{abc}$. Тогда по условию $100a + 10b + c = 56c$, откуда $20a + 2b = 11c$. Число $11c$, следовательно, кратно 2, то есть цифра c — чётна, $c = 2d$ ($d \leqslant 4$). Значит, $10a + b = 11d$. Но $10a + b = \overline{ab}$. В силу того, что это число делится без остатка на 11, $a = b$. Тогда $d = a$ и исходное число имеет вид $\overline{aa(2a)} = a \cdot \overline{112}$, то есть оно больше своей первой цифры в 112 раз.

Ответ: 112.

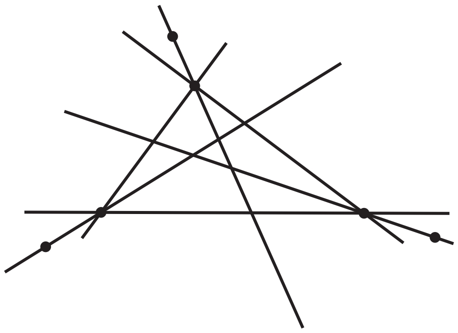
Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Получен верный ответ и обоснована его единственность	7 баллов
Обоснованно получен верный ответ, но ни одно из чисел, его реализующих, не приведено	баллы не снижаются
Найдены все возможные числа (112, 224, 336 и 448), но не обосновано, что других чисел нет	3 балла
При решении методом полного перебора не все случаи разобраны	2 балла
Найдены некоторые из чисел 112, 224, 336 и 448 или указан верный ответ без обоснования	1 балл

6.2. *Отметьте на плоскости 6 различных точек и проведите 6 прямых так, чтобы и на каждой прямой, и по обе стороны от неё было по две отмеченных точки.*

Решение: Например, так, как показано на рисунке.

Примечание: Требуемую конструкцию можно описать и словами. Например, так: Рассмотрим некоторый треугольник ABC и проведём через его вершины по



К решению задачи 6.2

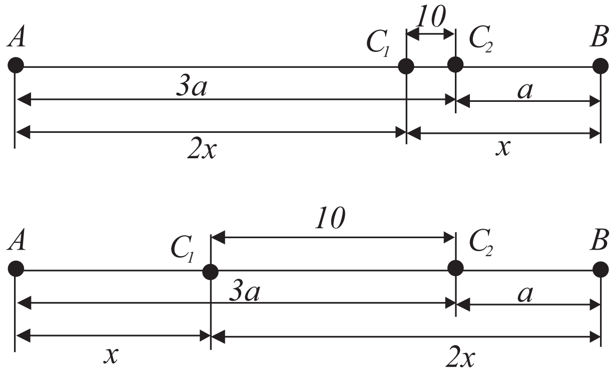
прямой, пересекающей противоположную сторону. Отметим на прямых по точке D, E, F так, чтобы лучи AD, BE и CF не пересекали треугольник. Точки A, B, C, D, E, F и проведённые прямые — те, которые требуются.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верная конструкция (нарисованная или описанная словами)	7 баллов
Неверные конструкции (в любом количестве)	0 баллов

6.3. *По дороге из города A в город B через каждый километр стоят километровые столбы. На каждом столбе с одной стороны написано расстояние до A, а с другой — расстояние до B. Утром турист проходил мимо столба, на котором одно число было вдвое больше другого. Пройдя еще 10 км, турист увидел столб, на котором два числа отличались в три раза. Каково расстояние от A до B? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение: Пусть C_1 и C_2 — столбы, о которых идёт речь в задаче (C_1 — столб, возле которого турист был утром). Без ограничения общности считаем, что турист шёл из A в B. Тогда возможны две ситуации: 1) $C_1A = 2C_1B$ или 2) $C_1B = 2C_1A$. Так как $C_2A > C_1A$, ситуация $C_2B = 3C_2A$ невозможна, поэтому имеет место ситуация $C_2A = 3C_2B$.



К решению задачи 6.3

1) Если $C_1A = 2C_1B$, то C_1A составляет $2/3$ всего расстояния AB. Тогда от второго столба расстояние до A составляет $\frac{3}{4}$ расстояния AB, то есть турист прошёл $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$ этой дистанции. Значит, $AB = 120$ км.

2) Если $C_1B = 2C_1A$, то $C_1A = \frac{1}{3}AB$. Тогда за день турист прошёл $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$ всей дистанции. Отсюда $AB = 24$ км.

Ответ: или 120 км, или 24 км.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Ход решения полностью верен, но имеются вычислительные ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Верно рассмотрен только один из двух случаев; (обосновано получен один из двух ответов)	3 балла
Верный указаны оба ответа (120 км и 24 км) или без обоснования, или с неверным обоснованием	2 балла
Приведён только пример, реализующий один из двух случаев	1 балл
Всевозможные рассуждения и выкладки, не приведшие к решению	0 баллов

6.4. *Когда Винни-Пух пришел в гости к Кролику, он съел* 3 *тарелки мёда,* 4 *тарелки сгущёнки и* 2 *тарелки варенья, а после этого не смог выйти наружу из-за того, что сильно растолстел от такой еды. Но известно, что если бы он съел* 2 *тарелки мёда,* 3 *тарелки сгущёнки и* 4 *тарелки варенья или* 4 *тарелки мёда,* 2 *тарелки сгущёнки и* 3 *тарелки варенья, то спокойно смог бы покинуть нору гостеприимного Кролика.*

От чего больше толстеют: от варенья или от сгущенки? Ответ обоснуйте.

Решение:

Способ 1. Пусть одна тарелка мёда имеет калорийность a ед, одна тарелка сгущёнки — b ед, одна тарелка варенья — c ед. (Чем выше калорийность продукта, тем больше от него толстеют.) Условие задачи означает, что $3a+4b+2c > 2a+3b+4c$ и $3a+4b+2c > 4a+2b+3c$. Первое неравенство сводится к виду $a > 2c-b$, второе — к виду $a < 2b-c$. Тогда $2b-c > 2c-b$, откуда $b > c$, то есть калорийность сгущёнки выше.

Способ 2. Пусть Винни-Пухов было 4. Первые двое съели каждый по 3 тарелки мёда, 4 тарелки сгущёнки и 2 тарелки варенья (и оба не смогли выйти наружу), третий и четвёртый съели тарелок мёда, сгущёнки и варенья соответственно 2, 3, 4 и 4, 2, 3. Тогда третий и четвёртый поправились меньше, чем первый и второй. Заметим, что первый и второй вместе съели мёда 6 тарелок — столько же, сколько третий и четвёртый вместе — но сгущенки съели 8 тарелок против 5, то есть на 3 тарелки больше, а варенья — 4 против 7, на те же 3 тарелки меньше. Значит, с 3 тарелок сгущенки толстеют сильнее, чем с 3 тарелок варенья.

Способ 3. Уберём отовсюду по 2 тарелки каждого продукта. Тогда окажется, что, во-первых, от тарелки мёда и двух тарелок сгущёнки толстеют сильнее, чем от тарелки сгущёнки и двух тарелок варенья; следовательно, тарелка мёда и тарелка сгущёнки даёт бо́льшую прибавку к весу, чем две тарелки варенья. Во-вторых, от тарелки мёда и двух тарелок сгущёнки толстеют сильнее, чем от тарелки варенья и двух тарелок мёда; следовательно, две тарелки сгущёнки дают большую прибавку к весу, чем тарелка мёда и тарелка варенья. Сопоставляя эти два вывода, получим, что тарелка мёда и три тарелки сгущёнки сытнее, чем тарелка мёда и три тарелки варенья, а, значит, сгущёнка сытнее варенья.

Ответ: От сгущёнки толстеют больше.

Примечание: Из условия задачи нельзя сделать вывод, какое место в цепи калорийности занимает мёд: он может быть и самым высококалорийным, и самым низкокалорийным из трёх продуктов, а равно занимать промежуточное по калорийности значения. Таким образом, любой вывод о соотношении калорийности мёда и сгущёнки (равно мёда и варенья) неверен.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Условие задачи верно записано через неравенства, но задача до ответа не доведена	3 балла
Ответ без обоснования	0 баллов

6.5. 101 *человек купили* 212 *воздушных шариков четырёх цветов, причём каждый из них купил хотя бы один шар, но при этом ни у кого не оказалось двух шаров одно цвета. Число людей, купивших* 4 *шара, на* 13 *больше числа людей, купивших* 2 *шара. Сколько человек купили только один шар? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение:

Способ 1. Сначала исключим 13 человек, купивших 4 шара. Останется 88 человек, купивших в сумме 160 шаров, причём каждый купил от 1 до 4 шаров, и людей, купивших 2 и 4 шара сейчас поровну. Пусть теперь каждый, купивший 4 шара, подарит один шар тому, у кого шара 2. Теперь у всех либо 1 шар, либо 3, а общее число людей и шаров то же самое. Пусть теперь каждый отпустит в небо по 1 шару; останется 72 шара на руках, причём у каждого будет либо 2 шара, либо ни одного. Значит, сейчас всего с шарами 36 человек, а остальные 52 шаров не имеют. Это и есть те люди, у которых изначально был один шар.

Способ 2. Пусть x_i ($1 \leqslant i \leqslant 4$) — количество людей, купивших ровно i шаров. По условию задачи имеем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 101, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 212, \\ x_4 - x_2 = 13. \end{cases}$$

Прибавляя к первому уравнению системы третье, получим $x_1 + x_3 + 2x_4 = 114$ (откуда $x_3 + 2x_4 = 114 - x_1$), а прибавляя ко второму уравнению удвоенное третье, найдём, что $x_1 + 3x_3 + 6x_4 = 238$. Тогда

$$238 = x_1 + 3(x_3 + 2x_4) = x_1 + 3(114 - x_1) = 342 - 2x_1.$$

Отсюда $x_1 = 52$.

Ответ: 52 человека.

Примечание: Решая систему из второго способа решения, можно найти все возможные распределения шаров по людям: $x_1 = 52$, $x_2 = a$, $x_3 = 36 - 2a$, $x_4 = a + 13$ (a — целое число из отрезка $[0; 18]$).

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	-1 балл за каждую ошибку
Верно составлена, система уравнений, описывающая условия задачи, при этом задача до ответа не доведена	3 балла
Приведён верный конкретный случай (или случаи, но не все) распределения шаров по людям	1 балл
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019 – 2020 учебном году

7 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

7.1. *Алёна пригласила Серёжу в гости, сообщив, что живет в 10-м подъезде, в квартире № 333, а этаж сказать забыла. Подходя к дому Алёны, Серёжа увидел, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему нужно подняться? В этом доме на каждом этаже каждого из подъездов одинаковое количество квартир; номера квартир начинаются с № 1. Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть на одном этаже в подъезде x квартир. Тогда $9 \cdot 9 \cdot x < 333$ (иначе Алёна живёт в подъезде с меньшим номером), но $9 \cdot 10 \cdot x \geqslant 333$ (иначе Алёна живёт в подъезде с большим номером). Отсюда $3{,}7 \leqslant x < 4{,}11\ldots$. Значит, $x = 4$, в одном подъезде 36 квартир, а в первых девяти подъездах 324 квартиры. Квартиры с № № 325 — 332 расположены на первых двух этажах десятого подъезда, а квартира № 333 — на третьем.

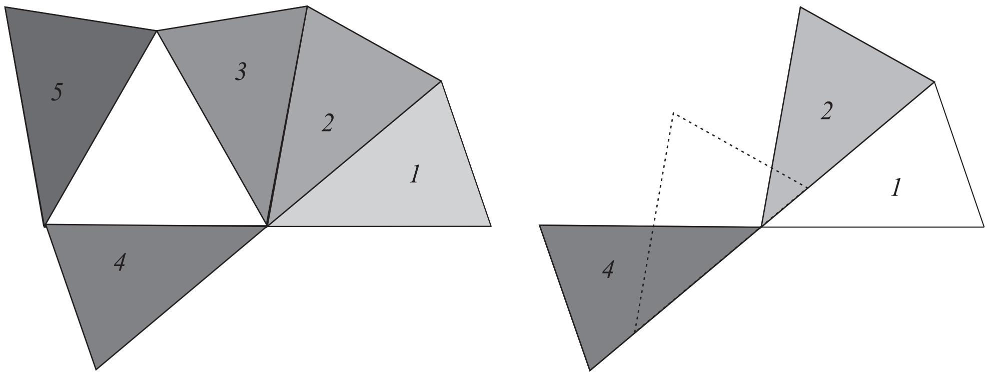
Ответ: Серёжа должен подняться на третий этаж.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Показано, что возможен случай третьего этажа (есть пример) и имеется односторонняя оценка числа квартир на этаже	5 баллов
Показано, что возможен случай третьего этажа (есть пример) но не обосновано, что нет других вариантов	3 балла
Имеется только односторонняя оценка: на одном этаже не менее (не более) 4 квартир	2 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл

7.2. *На столе лежит деревянный треугольник с углами 70°, 70° и 40° и карандаш, а других приборов нет. На большом листе бумаги нужно нарисовать какой-нибудь равносторонний треугольник. Как это сделать? Разрешается несколько раз класть треугольник на бумагу и обводить карандашом его контур.*

Решение: Заметим, что $40^\circ \cdot 3 = 120^\circ$, и что $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Значит, если мы последовательно обведём три раза треугольник, располагая его на бумаге так, как показано на рисунке слева (позиции 1 — 3), то отложим угол в 120°, а дополнительный до него будет равен 60°. Теперь поместим деревянный треугольник в позицию 4 — построим угол 60°. (Чтобы расположить треугольник проще всего сделать ещё одну обводку, положив деревянный треугольник так, чтобы одна из его сторон — неважно какая — частью лежала на проведённом отрезке, частью — выступала за него — рисунок справа.) При этом проведённые отрезки на сторонах угла будут равны, и мы получим равносторонний треугольник. Чтобы провести его третью сторону достаточно поместить деревянный треугольник в положение 5 на рисунке и обвести его контур.



К решению задачи 7.2

Примечание: Приведённое построение не единственно возможное.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	баллы
верное и обоснованное построение равностороннего треугольника	7 баллов
верное построение приведено, но не обсновано, почему получен равносторонний треугольник	6 баллов
Построен только угол в 60°, а треугольник — нет	5 баллов
Показано, как получить угол в 60°, через углы треугольника, например, $60° = 2 \cdot (70° - 40°)$, но построение не указано	2 балла
Приведённое построение использует незаконные операции (проведение параллельных, деление отрезка пополам и пр.)	0 баллов

7.3. *Валера, Серёжа и Дима получили за три контрольные работы каждый по три оценки, причём все оценки оказались тройками, четверками или пятёрками. Валера сказал: «У меня за две контрольные оценки больше, чем у Серёжи». Серёжа ответил: «Зато у меня за две контрольные оценки выше, чем у Димы». Дима парировал: «А я две контрольные написал лучше, чем Валера». Могли ли все мальчики говорить правду? Ответ обоснуйте.*

Решение: Если у Валеры были оценки 5, 4, 3 у Серёжи — 4, 3, 5, а у Димы — 3, 5, 4, то все мальчики сказали правду: Валера лучше Серёжи написал 1-ю и 2-ю контрольную, Серёжа лучше Димы 1-ю и 3-ю, а Дима лучше Валеры 2-ю и 3-ю.

Примечание: Приведённый вариант единственен с точностью до перестановки номеров контрольных работ; школьники, конечно, этого доказывать не должны.

Ответ: Могли.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Пример, показывающий, что все трое правы	7 баллов
Ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов

7.4. *У Кати волосы растут вдвое быстрей, чем она сама, а у Алёны, которая растёт со скоростью волос Кати, — в полтора раза быстрее, чем растёт Алёна. В настоящий момент у Алёны и у Кати одинаковая высота волос над полом. Чьи волосы раньше достигнут пола? Ответ обоснуйте.*

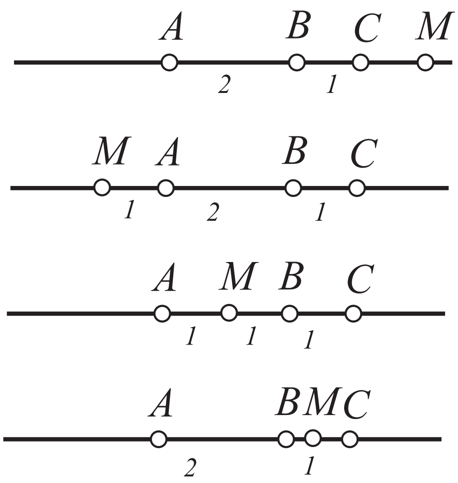
Решение: Пусть Катя выросла на x см. Тогда её волосы выросли на $2x$ см и расстояние от них до пола уменьшилось на $2x - x = x$ см. За это время Алёна выросла на $2x$ см, её волосы — на $3x$ см, и расстояние от них до пола уменьшилось на $3x - 2x = x$ см. Вывод: волосы Алёны и Кати достигнут пола одновременно.

Ответ: Одновременно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Ответ без обоснования	0 баллов

7.5. *Точка B лежит на отрезке AC, $AB = 2$, $BC = 1$. Укажите на прямой AC все точки M, для которых $AM + MB = CM$, и покажите, что других точек M с таким свойством нет.*



К решению задачи 7.5

Решение:

Способ 1. В зависимости от положения точки M на прямой AC возникают 4 случая.

Случай 1. Точка M лежит вне отрезка AC со стороны точки C. Тогда равенство невозможно, так как $AM > CM$.

Случай 2. Точка M лежит вне отрезка AC со стороны точки A. Тогда

$$CM = AM + AB + BC = MB + BC.$$

Для выполнения равенства необходимо и достаточно, чтобы $AM = BC$. Значит, M лежит вне отрезка AC со стороны A и отстоит от A на треть отрезка AC.

Случай 3. Точка M лежит на отрезке AB. Тогда $AM + MB = AB$, поэтому для выполнения равенства необходимо, чтобы $MC = AB$. Это возможно тогда и только тогда, когда M — середина AB.

Случай 4. Точка M лежит на отрезке BC. Тогда равенство невозможно, так как $AM > AB > BC > MC$.

Способ 2. Рассмотрим координатную ось. Возьмём в качестве начала координат точку A и направим ось вдоль луча AC. Тогда координаты точек A, B, C равны 0, 2 и 3 соответственно. Пусть x — координата точки M. Условие задачи определяется равенством $|x| + |x - 2| = |x - 3|$. Решая это уравнение (либо графически, либо рассматривая промежутки), находим два его корня: $x = 1$ и $x = -1$. Этим корням и соответствуют два возможных положения точки M.

Ответ: Таких точек две: середина отрезка AB и точка, лежащая на расстоянии 1 влево от точки A.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Задача верно сведена к решению уравнения с модулем, и это уравнение верно решено на некоторых, но не на всех промежутках	5 баллов
Верно разобраны три случая из четырёх, указанных в решении выше ИЛИ задача верно сведена к решению уравнения с модулем, которое не решено ни на одном промежутке	3 балла
Верно разобраны два случая из четырёх, указанных в решении выше	2 балла
Верно разобран один случая из четырёх, указанных в решении выше ИЛИ указаны (без обоснования) обе возможные точки M	1 балл
Указана (без обоснования) одна из возможных точек	0 баллов

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019 – 2020 учебном году

8 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

8.1. *Одуванчик утром распускается, этот и следующий день цветёт жёлтым, на третий день утром становится белым, а к вечеру облетает. Вчера днём на поляне было 20 жёлтых и 14 белых одуванчиков, а сегодня — 15 жёлтых и 11 белых. Сколько жёлтых одуванчиков было на поляне позавчера? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение: Все жёлтые одуванчики позавчера — это белые одуванчики вчера и белые одуванчики сегодня. Значит, позавчера было $14 + 11 = 25$ жёлтых одуванчиков.

Ответ: 25 одуванчиков.

Примечание: Количество жёлтых одуванчиков вчера и сегодня для решения задачи не нужно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Ответ без обоснования ИЛИ неверный ответ	0 баллов

8.2. *Улитка ползёт с постоянной скоростью вокруг циферблата часов по окружности против часовой стрелки. Она стартовала в* 12:00 *с отметки* 12 *часов, и закончила полный круг ровно в* 14:00 *того же дня. Какое время показывали часы, когда улитка в ходе своего движения встречалась с минутной стрелкой? Ответ обоснуйте.*

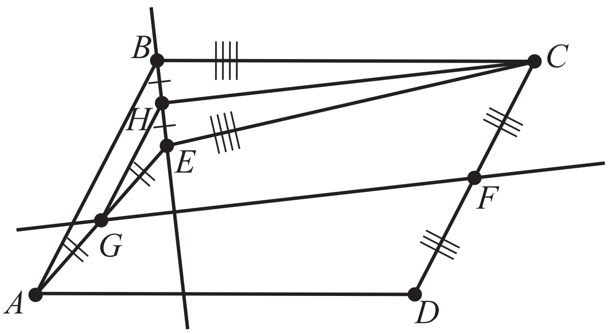
Решение: За два часа движения улитка описала полный круг, минутная стрелка — два полных круга. Вместе они описали три полных круга. Значит, один круг улитка и стрелка в сумме проходят за $120 : 3 = 40$ минут — и это есть время между их последовательными встречами. Значит, время, когда минутная стрелка встречалась с улиткой, это 12:40 и 13:20.

Ответ: 12 часов 40 минут и 13 часов 20 минут.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Задача верно сведена к уравнению или системе уравнений, которая не решена или решена неверно	5 баллов
Найдено, и проверено, что оно подходит, только одно значение 12,40 или 13,20	3 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл

8.3. *Внутри параллелограмма $ABCD$ взяли точку E так, что $CE = CB$. Пусть F и G — середины отрезков CD и AE соответственно. Докажите, что прямая FG перпендикулярна прямой BE.*



К решению задачи 8.3

Решение: Пусть H — середина отрезка BE. Тогда GH — средняя линия треугольника ABE, следовательно,

$$GH = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = CF$$

и прямые GH, AB и CD параллельны. Тогда у четырёхугольника $HCFG$ противоположные стороны GH и CF равны и параллельны, поэтому этот четырёхугольник — параллелограмм. Значит, прямая FG параллельна прямой CH, и нам достаточно показать перпендикулярность прямых CH и BE. Эта перпендикулярность вытекает из того, что треугольник BCE — равнобедренный, значит его медиана CH является также и его высотой.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Рассмотрены обе геометрические конструкции (см. пункт на 2 балла), но доказательство не завершено	5 баллов
Рассмотрена одна из двух геометрических конструкций: 1) средняя линия GH в треугольнике ABE или 2) медиана FH в треугольнике BFC	2 балла
Любые геометрические построения и рассуждения, которые в явном виде не ведут к доказательству	0 баллов

8.4. *Известно, что $abc = 1$. Вычислите сумму*

$$\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca}.$$

Решение: Заметим, что

$$\frac{1}{1+a+ab}=\frac{1}{abc+a+ab}=\frac{1}{a(1+b+bc)}=\frac{abc}{a(1+b+bc)}=\frac{bc}{1+b+bc}.$$

Аналогично, заменяя 1 на число abc, имеем

$$\frac{1}{1+c+ca}=\frac{ab}{1+a+ab}=\frac{ab^2c}{1+b+bc}=\frac{b}{1+b+bc}.$$

Тогда

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=\frac{bc}{1+b+bc}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{b}{1+b+bc}=1.$$

Ответ: 1.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верный ответ получен рассмотрением частных случаев (в любом количестве)	1 балл
Верный ответ без обоснования ИЛИ неверный ответ ИЛИ алгебраические преобразования, к ответу не приводящие	0 баллов

8.5. *За завтраком мама ежедневно дает Серёже или* 1 *бутерброд и* 3 *конфеты, или* 2 *бутерброда и* 4 *конфеты или* 3 *бутерброда и* 5 *конфет. Через несколько дней оказалось, что Серёжа съел ровно* 100 *бутербродов. Мог ли он при этом за то же время съесть ровно* 166 *конфет? Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. Предположим, что такое произошло. Заметим, что каждый день Петя съедает на 2 конфеты больше, чем бутербродов. Значит, процесс питания занял ровно $\frac{166-100}{2}=33$ дня. Но за 33 дня Петя мог съесть не более $3\cdot 33=99$ бутербродов. Противоречие.

Способ 2. Пусть x дней Серёжа съедает 1 бутерброд и 3 конфеты, y дней 2 бутерброда и 4 конфеты и z дней 3 бутерброда и 5 конфет. Тогда имеем, что $x+2y+3z=100$, а количество съеденных конфет равно $3x+4y+5z$. Решим систему $\begin{cases} x+2y+3z &= 100 \\ 3x+4y+5z &= 166 \end{cases}$ в целых неотрицательных числах. Вычтем из второго уравнения первое. После сокращения на 2 получим $x+y+z=33$, откуда $z=33-x-y$. Подставим найденное значение z в первое уравнение: $x+2y+3(33-x-y)=100$, то есть $-2x-y=1$. Противоречие, так как в левой части стоит отрицательное число, а в правой — положительное. Значит, система в целых неотрицательных числах решений не имеет, и съесть ровно 166 конфет Серёжа не мог.

Примечание: Можно получить все решения системы: ими являются тройки вида $(t,\ -2t-1,\ t+34)$. Противоречие будет заключаться в невозможности одновременного выполнения неравенств $t \geqslant 0$ и $-2t-1 \geqslant 0$.

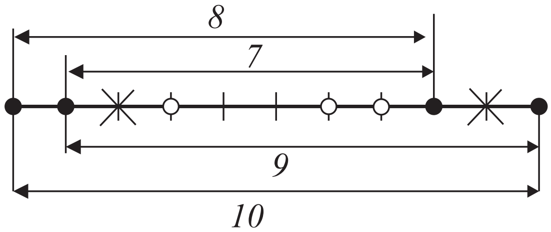
Ответ: Не мог.

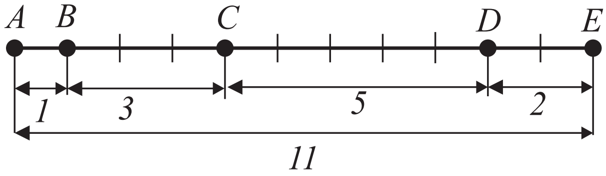
Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Указано, что разница между съеденными конфетами и бутербродами увеличивается ровно на 2 каждый день	3 балла
Задача верно сведена к анализу системы линейных уравнений, но этот анализ не проведён	2 балла
Ответ без обоснования или иллюстрация ответов конкретными примерами (в любом количестве)	0 баллов

8.6. *На некотором отрезке отметили его концы и три внутренние точки. Оказалось, что все попарные расстояния между пятью отмеченными точками различны и выражаются целым числом сантиметров. Какова наименьшая возможная длина отрезка? Ответ обоснуйте.*

Решение: Точек 5, попарных расстояний, следовательно, 10. Если все они выражаются целым положительным числом сантиметров и различны, среди них есть хотя бы одно, не меньшее 10. Значит, длина отрезка не меньше 10. Пусть длина отрезка ровно 10. Тогда попарные расстояния — все числа от 1 до 10. Среди них есть длина 9. Значит, обязательно отмечена точка, отстоящая на 1 см от одного из концов отрезка, пусть от левого — см. рисунок сверху, отмеченные точки — чёрные. Тогда не могут быть отмечены точки, отстоящие на 1 см от правого конца,





К решению задачи 8.6

и на 2 см от левого (они на рисунке зачёркнуты), иначе есть два отрезки длины 1 см. Чтобы возникла длина 8 см, необходимо отмечать точку, отстоящую от правого конца на 2 см. Теперь нельзя отмечать точки, отстоящие от отмеченных на 1 или 2 см (белые точки на рисунке). Остаются две точки, но каждая из них является серединой отрезка между какими-то уже отмеченными, поэтому их отметить тоже нельзя. Значит, отметить нужным образом 5 точек на отрезке длины 10 невозможно, и длина отрезка строго больше 10 см.

Эта длина равняется целому числу сантиметров, так как она реализует расстояние между отмеченными точками — концами отрезка. Значит, она не меньше 11 см. Покажем нужное расположение отмеченных точек на отрезке длины 11. Пусть отмеченные точки (слева направо) — это точки A, B, C, D и E. Пусть $AB = 1$, $BC = 3$, $CD = 5$, $DE = 2$ — все расстояния в сантиметрах (рисунок снизу). Тогда $AC = 4$, $AD = 9$, $AE = 11$, $BD = 8$, $BE = 10$, $CE = 7$ — все 10 расстояний разные.

Ответ: 11 сантиметров.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что на отрезке длины 10 отметить точки нужным образом нельзя, но примера на отрезке длины 11 см нет.	5 баллов
Приведён пример верного расположения точек на отрезке длины 11, не обосновано, что невозможна длина 10	2 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Неверные примеры расположения точек ИЛИ верные расположения точек на отрезках длины большей 11 см	0 баллов

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019 – 2020 учебном году
9 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

9.1. *В супермаркете продаются фруктовые наборы двух видов. Набор первого вида состоит из 3 яблок и 15 апельсинов и стоит 360 рублей. Набор второго вида состоит из 20 яблок и 5 апельсинов и стоит 500 рублей. Фрукты продаются только в наборах, делить наборы на части нельзя. Серёжа пришел в супермаркет и хочет купить одинаковое количество яблок и апельсинов. Какую наименьшую сумму ему придется потратить, если уйти, ничего не купив, Серёжа не может?*

Решение: Пусть Серёжа купил x наборов первого вида и y наборов второго. Тогда он купил $3x+20y$ яблок и $15x+5y$ апельсинов. Из условия задачи следует, что эти числа равны, то есть, $15y=12x$ или $5y=4x$. Чем меньше y, тем меньше и x, и тем меньше уплаченная сумма. Наименьшее натуральное y — это 4, тогда $x=5$, а затраченная сумма в рублях равна $5\cdot 360+4\cdot 500=3800$.

Ответ: 3800 рублей.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за ошибок в арифметике	6 баллов
Показано, что суммой 3800 рублей обойтись можно, но не показано, что нельзя обойтись меньшим числом рублей	2 балла
Примеры покупок, стоящих более 3800 рублей	0 баллов

9.2. *Пусть x, y и z — отличные от нуля действительные числа, удовлетворяющие равенствам: $\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+x}{y}$. Найдите все возможные значения выражения $\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$. Обоснуйте, что других значений быть не может.*

Решение: Пусть $S=x+y+z$. Тогда $\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{S-z}{z}=\dfrac{S}{z}-1$, $\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{S}{x}-1$, $\dfrac{z+x}{y}=\dfrac{S}{y}-1$, и условие сводится к равенству: $\dfrac{S}{z}=\dfrac{S}{y}=\dfrac{S}{x}$. Отсюда либо $x=y=z$, и тогда искомое выражение равно 8, либо $S=0$, и тогда оно равно

$\left(\frac{S-x}{x}\right)\left(\frac{S-y}{y}\right)\left(\frac{S-z}{z}\right) = -1$. Обе ситуации возможны: например, первая при $x=y=z=1$, вторая — при $x=y=1$, $z=-2$.

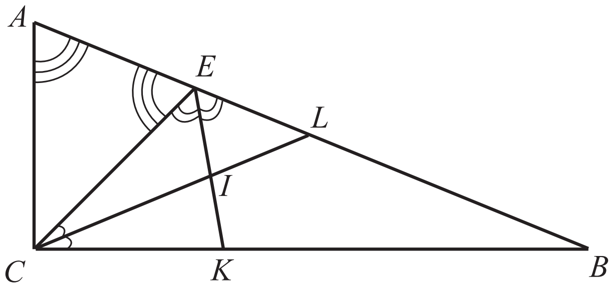
Ответ: 8 или -1.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Обосновано, что возможны только значения 8 и -1, но не приведены примеры, показывающие, что оба этих значения достигаются	6 баллов
Верно найдены оба возможных значения 8 и -1 и не показано, что нет других	2 балла
Верно найдено одно из возможных значений 8 или -1	1 балл

9.3. *В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB выбрана точка E так, что $AC = CE$. Биссектрисы CL и EK треугольника BCE пересекаются в точке I. Известно, что треугольник IKC равнобедренный. Найдите отношение $CL : AB$.*

Решение: Угол B должен быть меньше угла A, иначе на гипотенузе AB не найдётся точки E со свойством $AC = CE$. Пусть $\angle B = \beta$. Пусть, кроме того, $\angle ECB = \gamma$, а $\angle CEB = \delta$. Ясно, что $\beta + \gamma + \delta = 180°$. Выполнены равенства $\angle CAE = 90° - \beta$, а $\angle CEA = 180° - \delta$. Так как эти углы равны (в силу равенства сторон AC и CE треугольника ACE), имеем равенство $\delta = 90° + \beta$,



К решению задачи 9.3

откуда $2\beta + \gamma = 90°$. Из треугольника BEC легко находятся углы треугольника CIK: $\angle ICK = \gamma/2$, $\angle CKI = \delta/2 + \beta$, $\angle KIC = \gamma/2 + \delta/2$. Среди этих углов есть два равных. Равенство $\angle ICK = \angle KIC$ невозможно, так как $\delta > 0$. Равенство $\angle ICK = \angle CKI$ приводит к уравнению

$$\gamma/2 = \delta/2 + \beta, \quad \gamma = \delta + 2\beta = 90° + 3\beta = \gamma + 5\beta,$$

противоречие. Остаётся единственное: $\angle CIK = \angle CKI$, что эквивалентно равенству $\beta = \gamma/2$. Но тогда треугольник LCB — равнобедренный, $CL = LB$ и по свойству прямоугольного треугольника точка L — середина его гипотенузы. Тогда $CL : AB = 0{,}5$.

Заметим, что углы $\triangle ABC$ находятся однозначно: $\angle C = 90°$, $\angle B = 22{,}5°$, $\angle A = 67{,}5°$. Это означает, что описанная конструкция существует.

Ответ: $CL : AB = 0{,}5$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Нет доказательства существования конструкции, о которой говорится в задаче	баллы не снижать
Решение верно, за исключением того, что не обосновано, какие именно стороны треугольника IKC равны	5 баллов
Верный ответ, подкреплённый верным примером треугольника, без доказательства его единственности	3 балла
Верно обоснована невозможность обоих равенств 1) $CI = IK$ и 2) $CK = IK$	2 балла
Верно обоснована невозможность только одного равенства (см. предыдущий пункт)	1 балл
Верный ответ без обоснования	0 баллов

9.4. *На гранях кубика расставлены шесть различных натуральных чисел от* 6 *до* 11. *Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна* 36, *во второй раз —* 33. *Какое число написано на грани, противоположной той, где написано число* 10*? Ответ обоснуйте.*

Решение: Сумма чисел на всех 6 гранях кубика равна 51. Поэтому сумма чисел на верхней и нижней гранях при первом броске равняется 15, при втором — 18. Число 15 может быть получено (как сумма двух различных целых чисел из отрезка $[6; 11]$) двумя способами: $15 = 9 + 6 = 8 + 7$. Число 18 тоже двумя: $18 = 7 + 11 = 8 + 10$. Если числа 7 и 8 лежат на противоположных гранях, то оба последних представления невозможны. Значит, из двух указанных представления числа 15 имеет место первое, и в кубике против числа 9 лежит число 6. Теперь, если при втором броске на верхней и нижней гранях были числа 8 и 10, то ясно, что против 10 лежит 8. А если при втором броске на верхней и нижней гранях были числа 7 и 11, то на одной паре противоположных боковых сторон числа 6 и 9, а на второй — оставшиеся 8 и 10, и снова против числа 10 лежит число 8.

Ответ: 8.

Примечание: Задача может быть легко сведена к обычному игральному кубику следующим образом: уберём с каждой грани по 5 точек. Тогда кубик станет обычным, а условие примет вид: «В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна 16, во второй раз — 13. Какое число написано на грани, противоположной той, где написано число 5?». Дальнейшие рассуждения принципиально не меняются.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верный ответ, подкреплённый верным примером кубика (любым из двух возможных)	3 балла
Обоснована невозможность некоторых ситуаций (например, что против 10 не может лежать 11 или что сумма при первом броске не реализуется как $6+9+10+11$), но не все невозможные ситуации проанализированы	2 балла
Задача верно сведена к обычному кубику	1 балл
Ответ без обоснования (или неверный ответ)	0 баллов

9.5. *Докажите, что*

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{97}\cdot\frac{100}{99} > 10.$$

Решение: Пусть

$$A=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{97}\cdot\frac{100}{99},\quad B=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{97}{96}\cdot\frac{99}{98}.$$

Тогда

$$AB=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{98}\cdot\frac{100}{99}=100.$$

Кроме того, $A>B>0$. Действительно, $\frac{99}{98}<\frac{98}{97}$, $\frac{97}{96}<\frac{96}{95}$ и т. д. до $\frac{5}{4}<\frac{4}{3}$. Наконец, $\frac{3}{2}<\frac{2}{1}\cdot\frac{100}{99}$ и после умножения левых и правых частей этих 49 неравенств получаем $B<A$. Тогда $100=AB<A^2$, поэтому $A>10$, ч. т. д.

Рекомендации по проверке:

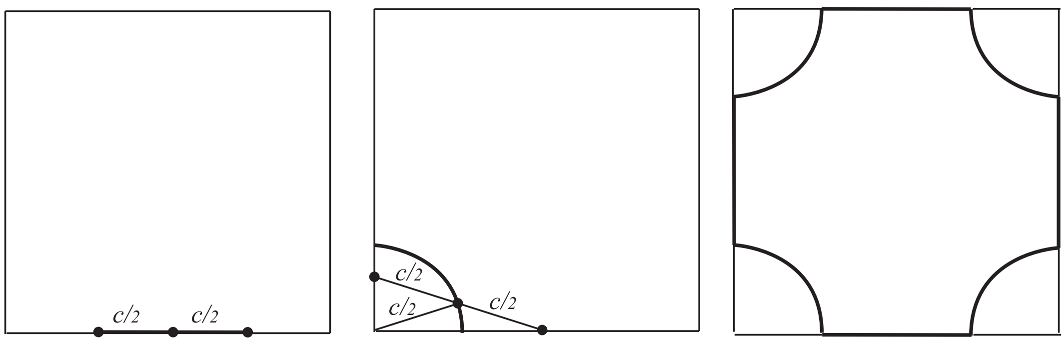
есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
При верном ходе решения доказательство неравенства $A > B$ содержит неточности	4 балла
Имеется не доведённая до решения идея рассмотрения выражения $B = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{97}{96} \cdot \frac{99}{98}$	3 балла
Любые выкладки, не приведшие к доказательству (в том числе неудачная попытка использования математической индукции)	0 баллов

9.6. *Дан квадрат с длиной стороны* 1 *и некоторое число* c ($0 < c \leqslant \sqrt{2}$). *Найдите геометрическое место точек — середин отрезков длины* c, *концы которых лежат на сторонах данного квадрата.*

Решение: Возможно две принципиально различные ситуации, каждая из которых имеет два подслучая.

Случай 1. $0 < c < 1$.

1а) Концы отрезка лежат на одной стороне. Тогда и середина его лежит на этой же стороне. Получаем на этой стороне отрезок, концы которого удалены от углов квадрата на расстояние $c/2$ (см. рисунок слева). Ясно, что каждая из точек этого отрезка реализуема, как середина отрезка длины c.



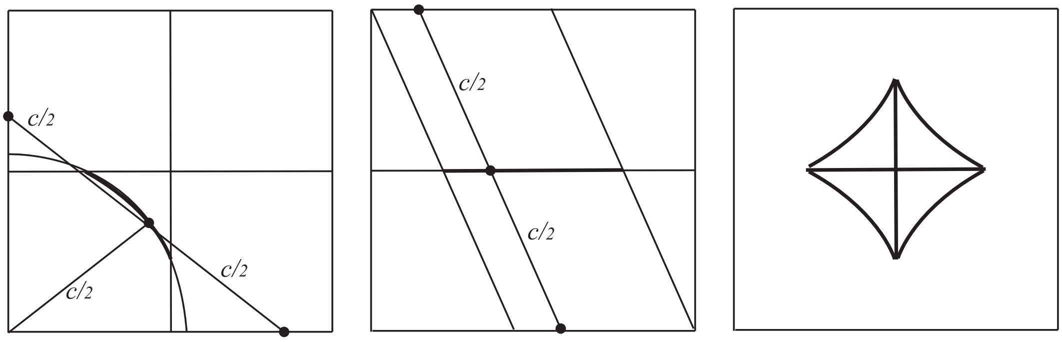
К решению задачи 9.6. Случай 1

1б) Концы отрезка лежат на смежных сторонах квадрата. Тогда середина отрезка находится внутри квадрата, и удалена от общей вершины сторон на расстояние $c/2$. Последнее означает, что она лежит на окружности радиуса $c/2$ с центром в этой общей вершине. Так как для любой точки этой окружности, лежащей внутри квадрата, нужный отрезок найдётся (достаточно построить два равнобедренный треугольника, как на рисунке в центре), получаем четыре дуги окружностей с центрами в углах квадрата. Заметим, что эти дуги не пересекаются между собой, а их концы совпадают с концами отрезков из пункта 1а.

Окончательно имеем множество, состоящее из четырёх дуг радиуса $c/2$ величины 90° и четыре отрезка, соединяющие концы соседних дуг — см. рисунок справа.

Случай 2. $1 \leqslant c \leqslant \sqrt{2}$.

2а) Концы отрезка лежат на смежных сторонах квадрата. Как и в случае 1б, получаем дуги четырёх окружностей. Но дуги эти поменьше, ограничиваются средними линиями квадрата (см. рисунок слева). Причина в том, что середина отрезка, концы которого лежат, скажем, на левой и нижней сторонах квадрата, находится левее и ниже середины квадрата, в чём легко убедиться. Как и в случае 1б, для всякой точки такой дуги отрезок длины c с концами на сторонах квадрата и центром в этой точке, строится.



К решению задачи 9.6. Случай 2

2б) Концы отрезка лежат на противоположных сторонах квадрата. Тогда середина отрезка лежит на средней линии квадрата, параллельной этим сторонам. Эти середины заполнят целиком некоторый отрезок средней линии. Концы этого отрезка определяются предельными положениями отрезка длины c — см. рисунок в центре. Они равноудалены от двух смежных углов квадрата и потому являются концами дуг окружностей, о которых говорилось в пункте 2а.

В результате геометрическое место точек представляет собой криволинейный четырёхугольник, в котором проведены диагонали (см. рисунок справа). Ещё уместно отметить, что при $c = 1$ он достигнет границ квадрата и будет представлять собой обе его средние линии плюс четыре четвертинки окружностей; при $c = \sqrt{2}$ четырёхугольник выродится в точку — центр квадрата.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верно и обоснованно найдено искомое ГМТ в обоих принципиальных случаях $c < 1$ и $c > 1$	7 баллов
Отдельно не рассмотрены предельные случаи $c = 1$ и $c = \sqrt{2}$	6 баллов
Верный ответ получен в обоих случаях $0 < c < 1$ и $1 < c < \sqrt{2}$, но обоснование не полно: либо не доказано, что не подходят другие точки, либо не показано, что ЛЮБАЯ точка ответа подходит	4 балла
Верно проанализирован один из случаев $0 < c < 1$ и $1 < c < \sqrt{2}$	3 балла
Верно рассмотрены только предельные случаи $c = 1$ и $c = \sqrt{2}$ (хотя бы один из них)	1 балл

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019 – 2020 учебном году

10 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

10.1. *В конкурсе, в котором участвовало 5 человек, было несколько вопросов. На каждый вопрос один из участников дал неправильный ответ, а остальные — правильные. Число правильных ответов у Пети равно 10 — это меньше, чем у любого другого. Число правильных ответов у Васи равно 13 — это больше, чем у любого другого. Сколько вопросов было в конкурсе? Ответ обоснуйте.*

Решение: На каждый вопрос было четыре верных ответа, значит, общее число верных ответов кратно четырём. Наибольшее количество верных ответов равно $13 + 3 \cdot 12 + 10 = 59$, наименьшее — $13 + 3 \cdot 11 + 10 = 56$. В промежутке от 56 до 59 есть только одно число, кратное 4: число 56. Значит, всего вопросов было $56 : 4 = 14$. Ситуация, когда вопросов ровно 14 возможна. Например, Вася неверно ответил только на первый вопрос, Петя — на второй, третий, четвёртый и пятый, и каждый из трёх оставшихся мальчиков — на три «своих» вопроса (скажем один — на вопросы №6 — 8, второй — №9 — 11 и третий — №12 — 14).

Ответ: 14 вопросов.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Не обосновано, что описанная в задаче ситуация возможна	баллы не снижать
При переборном решении разобраны не все случаи, но верный ответ и пример получены	3 балла
Установлены либо границы возможного количества верных ответов, (числа 56 и 59) либо делимость количества верных ответов на 4	2 балла
Приведён верный пример (и дан верный ответ), единственность ответа не обоснована	1 балл
Ответ без обоснования	0 баллов

10.2. *Можно ли в выражении* $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \frac{1}{5} * \frac{1}{6} * \frac{1}{7} * \frac{1}{8}$ *вместо знаков* $*$ *так расставить знаки плюс и минус, чтобы модуль этого выражения стал меньше* $\frac{1}{500}$*?*

Решение: Наименьшее общее кратное всех чисел знаменателя равно 840. Если в числителе после приведения к этому общему знаменателю всех дробей получится 0, -1 или 1, то ответ положительный; иначе отрицательный. Числители дробей после приведения равны 420, 280, 210, 168, 140, 120 и 105. Последней цифрой их суммы (с учётом знаков чисел) будет 3 или 7. Значит, так расставить знаки нельзя.

Ответ: Нельзя.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что после приведения к общему знаменателю числитель полученной дроби будет нечётен (или не равен 0)	3 балла
Доказано, что после приведения к общему знаменателю в задаче требуется получить несократимую дробь с числителем, не превосходящим по модулю числа 1	1 балл
Неверный ответ или верный ответ без обоснования, возможно, проиллюстрированный несколькими примерами	0 баллов

10.3. *Докажите, что при любом натуральном числе n и при любом действительном α имеет место двойное неравенство*

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{n+\sin^2\alpha} + \frac{1}{n+2\sin^2\alpha} + \ldots + \frac{1}{n+(2n+1)\sin^2\alpha} \leqslant 3.$$

Решение: Пусть $t = \sin^2\alpha$ (t — параметр, принимающий значение из отрезка $[0;\,1]$). Требуется доказать, что

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{n+t} + \frac{1}{n+2t} + \ldots + \frac{1}{n+(2n+1)t} \leqslant 3.$$

Каждая из дробей оцениваемой суммы тем больше, чем меньше её знаменатель, поэтому

$$\frac{1}{n+t} + \frac{1}{n+2t} + \ldots + \frac{1}{n+(2n+1)t} \leqslant \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{2n+1} =$$

$$= \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} \leqslant 2+1 = 3.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{n+t} + \frac{1}{n+2t} + \ldots + \frac{1}{n+(2n+1)t} \geqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+(2n+1)} \geqslant$$

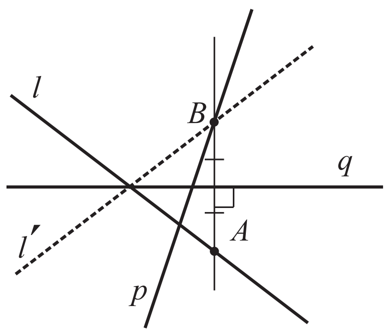
$$\geqslant \underbrace{\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+1}+\ldots+\frac{1}{3n+1}}_{2n+1}=\frac{2n+1}{3n+1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3(3n+1)}>\frac{2}{3}.$$

Ещё заметим, что оценка 3 достигается (при $n=1$, $\alpha=0$), а оценка $\dfrac{2}{3}$ — нет.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство	7 баллов
Доказано только одно из двух неравенств, либо $\leqslant 3$, либо $> \dfrac{2}{3}$	3 балла
Осуществлена замена $t=\sin^2\alpha$; других продвижений в решении нет	1 балл
Любые выкладки, из которых ход решения не просматривается, а также более грубые оценки, чем требуется	0 баллов

10.4. *На плоскости проведены три попарно пересекающиеся прямые: l, p, q. С помощью циркуля и линейки постройте на прямых l и p соответственно точки A и B так, чтобы отрезок AB был перпендикулярен прямой q и делился этой прямой пополам. Определите, сколько решений имеет задача в зависимости от взаимного расположения прямых l, p, q?*



К решению задачи 10.4

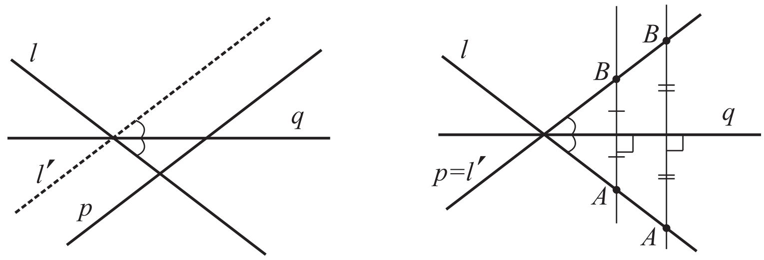
Решение:

Анализ. Пусть такие точки найдены. Тогда при осевой симметрии относительно прямой q они переходят друг в друга. При этом точка A лежит на прямой l, поэтому точка B обязана лежать на прямой l' — образе прямой l при указанной симметрии. Кроме того, B лежит на прямой p. Значит, B — точка пересечения прямых l' и p — см. рисунок. (Аналогично, A — точка пересечения прямых p' и l.)

Построение. Отобразим прямую l симметрично прямой q. Получим прямую l'. B — точка пересечения прямых p и l'. Точка A — точка пересечения прямой l и прямой, проходящей через точку B перпендикулярно прямой q.

Доказательство. По построению точка B лежит на прямой p, а прямая AB перпендикулярна прямой q. В силу того, что $B \in l'$, а прямая l' симметрична прямой l относительно q, образ точки B при этой симметрии лежит на прямой l. Кроме того, он лежит на прямой AB. Значит, точка A и является этим образом. Тогда прямая q — серединный перпендикуляр к отрезку AB, поэтому отрезок AB перпендикулярен прямой q и делится этой прямой пополам.

Исследование. Все указанные построения возможны, если только точка B найдётся. При этом для каждой полученной точки B точка A определяется однозначно. Точка B единственна (и тогда задача имеет единственное решение), если прямые l' и p не параллельны. Если же они параллельны, то решений нет, исключая тот случай, когда прямая l' совпадёт с прямой p — тогда решений бесконечно много (в качестве B подойдёт любая точка прямой p). Параллельность означает, что прямая q параллельна биссектрисе угла, образованного прямыми l и p, совпадение — что прямая q сама является этой биссектрисой.



К решению задачи 10.4. *Слева* — решений нет, *справа* — бесконечно много решений

Ответ: Если прямая q является биссектрисой угла, образованного прямыми l и p, то решений бесконечно много; если она параллельна биссектрисе, но не совпадает с ней — решений нет. Иначе решение единственно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное обоснованное построение и верное исследование	7 баллов
И построение, и исследование есть, но доказательство того, что построение приводит к нужному отрезку не полно или отсутствует	6 баллов
Верное обоснованное построение, но анализ не проведён (упущен хотя бы один из случаев: решений нет или их бесконечно много)	5 баллов
Имеется идея рассмотреть симметрию относительно прямой q; при этом построение точек не сделано	2 балла
Верно исследованы частные случаи, когда решений нет, или когда их бесконечно много	по 1 баллу за случай
Всевозможные замечания о исследуемой конструкции, которые к решению не привели	0 баллов

10.5. *Пусть* $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$. *Найдите все значения, которые может принимать число* $x+y$, *и докажите, что других значений быть не может.*

Решение: Рассмотрим функцию $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$. Так как при любом действительном x выполнено $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant -x$, эта функция всюду положительна. Пусть $a > 0$. Решая уравнение $f(x) = a$, находим, что значение a функция принимает в единственной точке $x = \dfrac{a^2-1}{2a}$. Наше уравнение имеет вид $f(x)f(y) = 1$. Значит, если $f(x) = a$, то $f(y) = 1/a$. Тогда $x = \dfrac{a^2-1}{2a}$, $y = \dfrac{\dfrac{1}{a^2}-1}{2\cdot\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1-a^2}{2a}$. Отсюда $x + y = 0$.

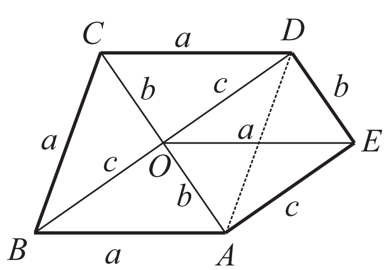
Ответ: 0.

Примечание: У задачи есть и другие решения, в том числе связанные с тригонометрической заменой $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения в преобразованиях допущены ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	4 балла
Идея рассмотрения функции $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, не доведённая до решения задачи	2 балла
Верный ответ, подкреплённый верными примерами (в любом количестве), но не доказанный в общем случае	1 балл
Верный ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов

10.6. *Точку внутри выпуклого пятиугольника соединили с его вершинами, в результате чего пятиугольник оказался разбитым на 5 равных между собой неравнобедренных треугольников. Докажите, что эти треугольники прямоугольные.*



К решению задачи 10.6

Решение: Пусть пятиугольник обозначен буквами $ABCDE$, а внутри выбрали точку O. Обозначим стороны получившихся треугольников через a, b, c, а противолежащие им углы (в градусах) через α, β и γ. Для каждого из пяти треугольников AOB, BOC, COD, DOE и EOA запишем на сторонах их длины. Так как отрезки OA, OB, OC, OD и OE входят в два треугольника каждый, на них будет записано по две одинаковые буквы, а так как каждая из букв a, b, c записана нечётное число раз (именно 5), то и на отрезках периметра пятиугольника каждая из этих букв встретится нечётное число раз. Это возможно только если одна из букв (пусть a) встречается трижды, а две остальные — по одному разу. Тогда среди углов AOB, BOC, COD, DOE и EOA ровно три угла

α, один угол β и один угол γ. Имеем $3\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$. Так как $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ (как сумма углов любого треугольника), получаем $2\alpha=180^\circ$ или $\alpha=90^\circ$, что и означает прямоугольность каждого из треугольников AOB, BOC, COD, DOE и EOA.

Для полноты решения следует показать, что ситуация, описанная в задаче, возможна. Пример. Рассмотрим ромб $ABCD$, отличный от квадрата. Пусть O — точка пересечения его диагоналей, а точка E симметрична точке O относительно середины стороны DA. Легко проверить, что треугольники AOB, BOC, COD, DOE и EOA равны, то есть условие задачи выполнено.

Примечание: Из приведённого решения несложно увидеть, что построенный пример — единственно возможный (с точностью до линейных размеров сторон и острого угла ромба). Поэтому можно, например, выразить все углы такого пятиугольника через его наименьший угол φ. Они будут равными φ, $180^\circ-\varphi$, $90^\circ+\dfrac{\varphi}{2}$, $180^\circ-\dfrac{\varphi}{2}$, 90°.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство и пример пятиугольника и точки	7 баллов
Верное доказательство, но пример отсутствует	6 баллов
Доказано, что из пяти сторон пятиугольниа три равны, а две другие различны	3 балла
Приведён пример пятиугольника и точки внутри него, реализующие условие задачи	1 балл

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019 – 2020 учебном году
11 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

11.1. *В каждую клетку квадрата 2×2 вставлено по числу. Все числа попарно различны, сумма чисел в первой строке равна сумме чисел во второй строке, а произведение чисел в первом столбце равно произведению чисел во втором столбце. Докажите, что сумма всех четырёх чисел равна нулю.*

Решение:

Способ 1. Пусть в верхней строке таблицы стоят числа a и b, во второй — c и d; числа a и c стоят в одном столбце. Тогда условие задачи равносильно системе

$$\begin{cases} a+b = c+d, \\ ac = bd. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения одну из переменных, например, c и подставим во второе: $a(a+b-d) = bd$. Отсюда $a^2+ab = bd+ad$, $a(a+b) = d(a+b)$. Так как a и d различны, отсюда следует, что $a+b = 0$. Тогда $c+d = a+b = 0$ и сумма всех чисел таблицы равна 0. Утверждение задачи доказано.

Способ 2. Пусть сумма чисел в каждой из строк равна S. Тогда в первой строке записаны числа $S-t$ и $S+t$, во второй — числа $S-p$ и $S+p$. Числа t и p различны и, без ограничения общности, оба положительны. Чтобы произведения чисел в столбцах были равны, необходимо, чтобы выполнялось одно из двух равенств: $(S-t)(S+p) = (S+t)(S-p)$ или $(S+t)(S+p) = (S-t)(S-p)$. Путём раскрытия скобок и приведения подобных первое равенство приводится к виду $S(p-t) = S(t-p)$, откуда $S = 0$, поскольку t и p различны. Аналогичные действия со вторым равенством приводят к уравнению $S(p+t) = -S(p+t)$, откуда опять-таки $S = 0$, так как число $p+t$ — положительное. Сумма всех четырёх чисел равна $2S$, что тоже 0. Утверждение задачи доказано.

Примечание: В качестве примера такой таблицы подойдёт любая, в которой числа в каждой из строк противоположны.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Не приведён пример таблицы из условия	баллов не снижать
Условие задачи верно записаны в алгебраической форме (через уравнение или систему уравнений)	2 балла
Утверждение проиллюстрировано конкретными примерами таблиц (в любом количестве)	0 баллов

11.2. *В городе Перпендикуляринске решили построить новые дома из нескольких этажей (некоторые из них могут быть и одноэтажными), но так, чтобы суммарное число этажей было равно 30. Архитектор города Параллельников предложил проект, согласно которому, если после постройки залезть на крышу каждого нового дома, сосчитать число более низких новых домов и сложить все такие числа, то полученная сумма будет максимально большой. Чему равна указанная сумма? Сколько при этом домов, и какой этажности предлагается построить?*

Решение: 1) Покажем, что проект не предполагает постройку домов, в которых больше двух этажей. Предположим противное, что такие дома запланированы. Возьмём самый низкий из них и уменьшим его на один этаж, построив за счёт этого дополнительный одноэтажный дом. Сумма чисел, о которой идёт речь в условии, при этом уменьшится на количество новых двухэтажных домов (и то, только в случае, если мы уменьшили трёхэтажный дом) и увеличится на количество новых домов, у которых 2 этажа или больше (за счёт построенного одноэтажного). Следовательно, сумма нового проекта больше. Противоречие. Итак, Параллельников предлагает строить только двух- и одноэтажные дома.

2) Пусть проект предусматривает постройку x одноэтажных домов и y двухэтажных. Тогда $x+2y = 30$, а сумма получится равной произведению xy. Нам, следовательно, требуется максимизировать выражение $y(30 - 2y)$ на отрезке $[0; 15]$. Максимум достигается в вершине параболы, в точке $y = 7{,}5$. Учитывая, что y — целое, получаем, что наибольшее значение достигается при $y = 7$ или при $y = 8$ и равно 112. Соответственно x равен либо 16, либо 14.

Ответ: Сумма равна 112. Проект предполагает постройку либо 14 одноэтажных и 8 двухэтажных домов, либо 16 одноэтажных и 7 двухэтажных.

Рекомендации по проверке:

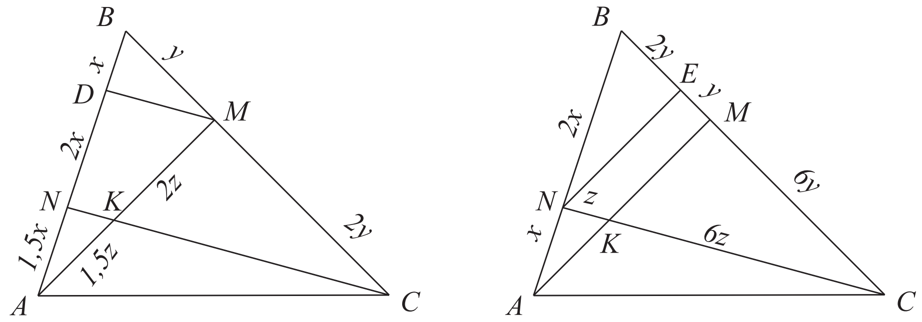
есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения «потерялся» один из двух наборов домов, составляющих ответ и/или сумма определена неверно из-за ошибок в арифметике	6 баллов
Доказано, что проект не предусматривает домов, выше трёх этажей, а дальнейшие рассуждения неверны	4 балла
Верно проанализирован случай, когда все дома одно- или двухэтажные, но не доказано, что максимум достигается именно на таких наборах домов	3 балла
Доказаны некоторые утверждения о свойствах оптимального набора домов, не приведшие к решению (например, что должны быть одноэтажные дома, или что высоты домов идут без пропусков)	не более 2 баллов
Безо всякого обоснования приведены оба возможных набора домов и верно подсчитана требуемая сумма	2 балла
Верно указана требуемая сумма без обоснования, или приведён один из двух примеров, на которых эта сумма достигается	1 балл
Неверный ответ	0 баллов

11.3. *В этот раз пиццу испекли почему-то в форме неправильного треугольника и разрезали на 7 частей тремя прямолинейными разрезами, как указано на рисунке (каждый разрез проводился из вершины в точку, делящую сторону в отношении 1:2).*

Билли, Вилли и Дилли взяли себе по треугольному кусочку с углов (они отмечены более тёмным цветом), а дядюшка Скрудж — треугольный кусочек из серёдки (светло-серый цвет). Докажите, что дядюшка Скрудж съел столько же пиццы, сколько все три его племянника вместе взятые.

Решение: Прежде всего установим, в каком отношении делят друг друга отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками, делящими сторону на три части (такие отрезки называются *тридианами*).

Пусть тридианы AM и CN треугольника ABC пересекаются в точке K — см. рисунок. $2BM = MC$, $2AN = NB$. Чтобы понять, в каком отношении точка K делит тридиану AM, проведём прямую $MD \parallel CN$ (точка D лежит на стороне AB — рисунок слева). Пусть $BM = y$, Тогда $MC = 2y$. По теореме Фалеса из треугольника BNC получим, что $BD = x$, $DN = 2x$ для некоторого x. Тогда $BN = 3x$, а $AN = 1{,}5x$. Снова по теореме Фалеса, но для треугольника AMD получим $AK = 1{,}5z$, $KM = 2z$, откуда $AK : KM = 3 : 4$.



К решению задачи 11.3

Аналогично находится в каком отношении точка K делит вторую тридиану — рисунок справа. Получим $CK : KN = 6 : 1$.

Теперь найдём отношение площадей фигур, на которые разрезы разделили пиццу. Первый разрез (пусть это был разрез AM) разделил пиццу на 2 треугольные части. У этих треугольников одна и та же высота, опущенная из точки A, поэтому отношение их площадей равно отношению оснований, то есть равно $BM : MC = 1 : 2$. Итак, треугольник ABM составляет треть всей пиццы.

Проведём второй разрез, CN. От треугольного куска ABM он отсечёт треугольный кусочек AKN. У треугольников AKN и ABM общий угол A, поэтому отношение их площадей равно отношению $\frac{AB}{AN} \cdot \frac{AM}{AK} = \frac{3}{1} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{1}$. Иными словами, кусочек AKN составляет одну седьмую куска ABM или одну двадцать первую часть всей пиццы. Разумеется, это же верно и для двух других кусочков, которые взяли Билли, Вилли и Дилли. Значит, племянники дядюшки Скруджа взяли себе $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ всей пиццы. Доля дядюшки получится, если от всей пиццы отнять взятое племянниками (останется $\frac{6}{7}$ пиццы) и отнять из неё три белых кусочка. Каждый такой кусочек получается удалением от трети пиццы двух долей племянника, поэтому он составляет $\frac{1}{3} - \frac{2}{21} = \frac{5}{21}$ от всей пиццы. Тогда все три белых куска составляют $\frac{5}{7}$ пиццы, и на долю Дядюшки Скруджа приходится $\frac{6}{7} - \frac{5}{7} = \frac{1}{7}$ пиццы — ровно столько же, сколько взяли его три племянника. Утверждение задачи доказано.

Примечание 1: Для решения задачи достаточно найти только одно из отношений, в которых одна тридиана делит другую; так, в приведённом выше решении использовалось только отношение $AK : KM$.

Примечание 2: Поскольку при деформации треугольника (так называемое, аффинное преобразование) отношение площадей не изменяется, для решения задачи достаточно рассмотреть частный случай треугольника, например, правильный треугольник. Разумеется, при таком решении школьник должен сослаться на нужное свойство аффинного преобразования, иначе решение не будет обоснованным.

Примечание 3: Ключевое место в решении задачи — понять, в каком отношении одна тридиана делит другую. Это можно сделать не только способом, указанном в приведённом решении, но и многими другими (например, через теорему Менелая). Если школьник не приводит доказательства этого ключевого факта, а только пишет его формулировку, то это следует считать серьёзным упущением в решении.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство	7 баллов
В решении используется без доказтельства верный факт об отношении, в котором тридианы делят одна другую	снять 2 балла
Задача решена для частного случая (например, когда пицца — равносторонний треугольник), но ссылки на свойства аффинных преобразований нет	5 баллов
Верно найдены доли Билли, Вилли и Дилли (вместе или порознь)	4 балла
Найдено, в каком отношении одна из тридиан делит другую	3 балла
Всевозможные построения и выкладки, из которых не видно хода решения	0 баллов

11.4. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} &= \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}+1\right), \\ y\sqrt{1-x^2} &= \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1\right). \end{cases}$$

Решение:

Способ 1. Из области допустимых значений системы следует, что $-1 \leqslant x,\ y \leqslant 1$. Кроме того, оба эти числа положительны, поскольку в правых частях уравнений стоят положительные числа. Поэтому мы вправе считать, что $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$ для некоторых α и β из отрезка $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Система при этом примет вид

$$\begin{cases} \sin\alpha\cdot\cos\beta &= \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}+1\right), \\ \sin\beta\cdot\cos\alpha &= \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1\right). \end{cases}$$

Складывая левые и правые части уравнений, получим $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, а вычитая, находим, что $\sin(\alpha-\beta) = \dfrac{1}{2}$. Так как число $\alpha-\beta$ лежат на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, оно равно $\dfrac{\pi}{6}$. Число $\alpha+\beta$ лежат на отрезке $[0;\,\pi]$, и потому равно либо $\dfrac{\pi}{3}$, либо $\dfrac{2\pi}{3}$. Тогда $\alpha = \dfrac{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{2}$ либо $\dfrac{5\pi}{12}$, либо $\dfrac{\pi}{4}$. Соответствующие этим значениям значения β равны $\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{\pi}{12}$ соответственно. Имеем две пары $\left(\sin\dfrac{5\pi}{12};\, \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\sin\dfrac{\pi}{4};\, \sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Способ 2. Возведём оба уравнения в квадрат, что является равносильным преобразованием при $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$. Заменив $x^2=a$, $y^2=b$, получим систему

$$\begin{cases} a(1-b) &= \dfrac{2+\sqrt{3}}{8}, \\ b(1-a) &= \dfrac{2-\sqrt{3}}{8}. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, найдём $a-b=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Выражая отсюда a и подставив это значение в первое из уравнений системы, получим

$$\left(b+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot(1-b)=\frac{2+\sqrt{3}}{8}.$$

Решая это квадратное уравнение, находим $b_1=\dfrac{1}{2}$, $b_2=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$. Поскольку имеем $a=b+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, то получаем $a_1=\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$, $a_2=\dfrac{1}{2}$. Учитывая неотрицательность чисел x и y, находим два решения системы: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\, \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};\, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Ответ: $\left\{\left(\sin\dfrac{5\pi}{12};\, \sin\dfrac{\pi}{4}\right),\left(\sin\dfrac{\pi}{4};\, \sin\dfrac{\pi}{12}\right)\right\}$.

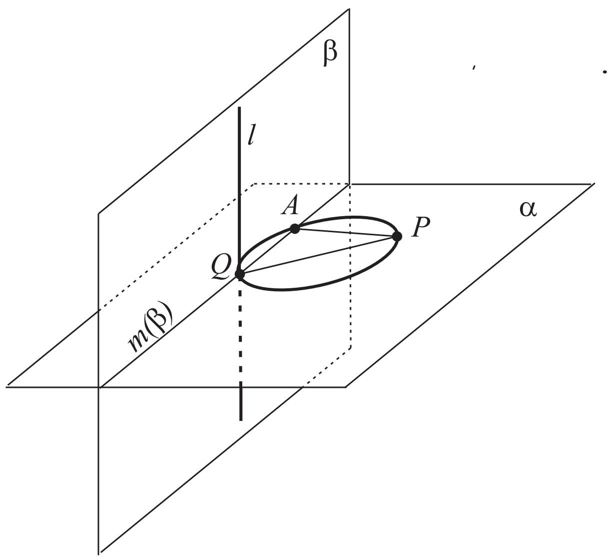
Другая форма записи $\left\{\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};\, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\, \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)\right\}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за ошибок в арифметике или при работе с квадратными корнями	5 баллов
Верно и обосновано найдена только одна пара $(x,\, y)$, решающая систему	3 балла
Осуществлена тригонометрическая замена или получено верное квадратное уравнение относительно одной из переменных	2 балла
Верный ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов

11.5. *В пространстве проведена прямая l и отмечена точка P, не лежащая на этой прямой. Найдите геометрическое место точек — проекций точки P на всевозможные плоскости, проходящие через прямую l.*

Решение: Пусть данные прямая и точка — это прямая l и точка P ($P \notin l$). Проведём через P плоскость α, перпендикулярную прямой l, и пусть она пересекает прямую l в точке Q. Всякая плоскость β, проходящая через прямую l, пересекается с плоскостью α по некоторой прямой $m(\beta)$, причём $l \perp m(\beta)$. Перпендикуляр PA, опущенный из точки P на $m(\beta)$, будет тогда и перпендикуляром ко всей плоскости β, так как он перпендикулярен пересекающимся прямым l и $m(\beta)$. При этом



К решению задачи 11.5

угол PAQ будет прямым. Значит, искомое ГМТ содержится в окружности с диаметром PQ, лежащей в плоскости α. Легко убедиться в том, что каждая точка этой окружности подходит: при $A = Q$ рассматривается перпендикуляр на плоскость, проходящую через l и перпендикулярную к PQ, при других A достаточно провести плоскость через A и l и опустить на неё перпендикуляр.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верно указано ГМТ и доказано, что любая его точка является основанием какого-нибудь перпендикуляра, а другие точки пространства — не являются	7 баллов
Доказано, что ГМТ содержится среди точек окружности, но не обосновано, что любая точка окружности подойдёт	4 балла
ГМТ указано верно, и доказано, что любая его точка подходит, но не обосновано, что в ГМТ нет точек, отличных от указанных	3 балла
ГМТ указано верно, но обоснование, что оно такое неверно или отсутствует	2 балла
Доказано, что ГМТ содержится в плоскости, проходящей через P и перпендикулярной прямой l	1 балл

11.6. *Шериф считает, что если он поймал в некоторый день количество бандитов, которое является простым числом, то ему повезло. В понедельник и во вторник шерифу везло, а начиная со среды количество пойманных им бандитов было равно сумме позавчерашнего и удвоенного вчерашнего числа. Какое максимальное число дней подряд шерифу могло везти на этой неделе? Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть в понедельник день шериф поймал 7 бандитов, а во вторник — 3. Тогда в среду, четверг и пятницу он поймал соответственно 13, 29 и 71 бандита. Все эти числа — простые, и шерифу везёт пять дней подряд.

Покажем, что шесть дней подряд шерифу вести не может. Заметим, что уже в среду это количество не меньше $2 \cdot 2 + 3 = 7$, и дальше только возрастает. Значит достаточно показать, что в в среду, четверг, пятницу или субботу будет день, когда число пойманных бандитов кратно 3.

Предположим противное, что во все эти дни количество пойманных бандитов не делится на 3. В частности, не делятся на 3 количества бандитов, пойманных в среду и четверг; обозначим их A и B соответственно. Тогда количество бандитов, пойманных в пятницу, равно $A + 2B$. Возможны две ситуации.

1) Остатки от деления на три чисел A и B одинаковы. Тогда имеем, что число $A+2B = A+B+B$ представляет собой сумму трёх чисел с одинаковым остатком от деления на 3, следовательно, делится на 3. Противоречие.

2) Остатки от деления на три чисел A и B разные: один равен единице, второй — двум. Тогда число $A+B$ кратно трём, поэтому число $A+2B = (A+B)+B$ имеет при делении на 3 тот же остаток, что и число B. Значит, количества бандитов, пойманный в четверг и в пятницу, имеют одинаковый остаток от деления на 3. Рассуждая, как в пункте 1, получим, что количество бандитов, пойманных

в субботу, делится на 3. Снова противоречие.

Доказательство завершено.

Ответ: 5 дней.

Примечание: Математическая модель задачи такова: Дана последовательность $\{a_n\}$ натуральных чисел, при всех натуральных n удовлетворяющая соотношению $a_n + 2a_{n+1} = a_{n+2}$. Требуется понять, какое наибольшее количество её последовательных членов могут быть простыми числами.

Ключевым моментом решения является утверждение о том, в среди любых четырёх членов этой последовательности есть хотя бы один, кратный трём. Этот факт может быть доказан по-разному, в том числе перебором всех остатков от деления на 3 чисел a_1 и a_2. Разумеется, перебор должен быть полным.

Из решения также следует, что для получения пяти последовательных простых чисел, одно из чисел a_1 или a_2 обязано равняться 3.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Обосновано, что 6 дней подряд шерифу везти не может, но нет обоснования, что может везти 5 дней подряд	4 балла
Есть идея рассмотреть остатки от деления на 3 (или любое другое число, кратное 3)	2 балла
Пример, когда шерифу везёт ровно 5 дней без доказательства, что большего числа быть не может	1 балл
Ответ без обоснования или неверный ответ, а также примеры, когда шерифу везёт менее 5 последовательных дней	0 баллов