Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2019 – 2020 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019 – 2020 учебном году

7 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

7.1. *Алёна пригласила Серёжу в гости, сообщив, что живет в 10-м подъезде, в квартире № 333, а этаж сказать забыла. Подходя к дому Алёны, Серёжа увидел, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему нужно подняться? В этом доме на каждом этаже каждого из подъездов одинаковое количество квартир; номера квартир начинаются с № 1. Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть на одном этаже в подъезде x квартир. Тогда $9 \cdot 9 \cdot x < 333$ (иначе Алёна живёт в подъезде с меньшим номером), но $9 \cdot 10 \cdot x \geqslant 333$ (иначе Алёна живёт в подъезде с большим номером). Отсюда $3{,}7 \leqslant x < 4{,}11\ldots$. Значит, $x = 4$, в одном подъезде 36 квартир, а в первых девяти подъездах 324 квартиры. Квартиры с № № 325 — 332 расположены на первых двух этажах десятого подъезда, а квартира № 333 — на третьем.

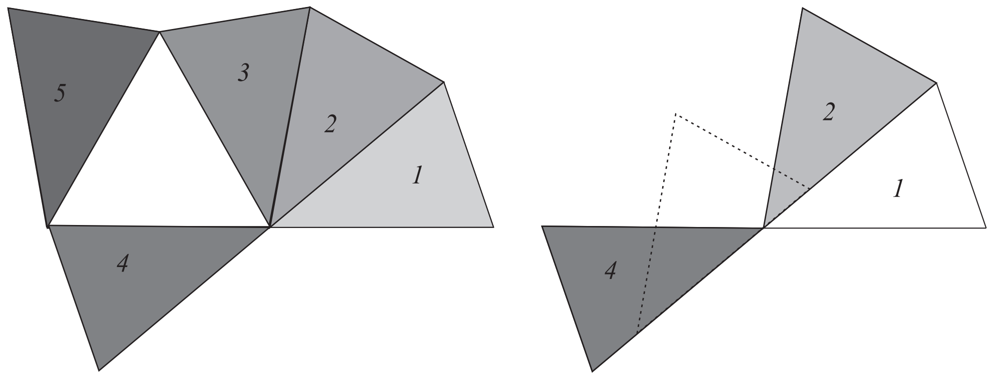
Ответ: Серёжа должен подняться на третий этаж.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Показано, что возможен случай третьего этажа (есть пример) и имеется односторонняя оценка числа квартир на этаже	5 баллов
Показано, что возможен случай третьего этажа (есть пример) но не обосновано, что нет других вариантов	3 балла
Имеется только односторонняя оценка: на одном этаже не менее (не более) 4 квартир	2 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл

7.2. *На столе лежит деревянный треугольник с углами 70°, 70° и 40° и карандаш, а других приборов нет. На большом листе бумаги нужно нарисовать какой-нибудь равносторонний треугольник. Как это сделать? Разрешается несколько раз класть треугольник на бумагу и обводить карандашом его контур.*

Решение: Заметим, что $40° \cdot 3 = 120°$, и что $180° - 120° = 60°$. Значит, если мы последовательно обведём три раза треугольник, располагая его на бумаге так, как показано на рисунке слева (позиции 1 — 3), то отложим угол в 120°, а дополнительный до него будет равен 60°. Теперь поместим деревянный треугольник в позицию 4 — построим угол 60°. (Чтобы расположить треугольник проще всего сделать ещё одну обводку, положив деревянный треугольник так, чтобы одна из его сторон — неважно какая — частью лежала на проведённом отрезке, частью — выступала за него — рисунок справа.) При этом проведённые отрезки на сторонах угла будут равны, и мы получим равносторонний треугольник. Чтобы провести его третью сторону достаточно поместить деревянный треугольник в положение 5 на рисунке и обвести его контур.



К решению задачи 7.2

Примечание: Приведённое построение не единственно возможное.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное и обоснованное построение равностороннего треугольника	7 баллов
верное построение приведено, но не обосновано, почему получен равносторонний треугольник	6 баллов
Построен только угол в 60°, а треугольник — нет	5 баллов
Показано, как получить угол в 60°, через углы треугольника, например, $60° = 2 \cdot (70° - 40°)$, но построение не указано	2 балла
Приведённое построение использует незаконные операции (проведение параллельных, деление отрезка пополам и пр.)	0 баллов

7.3. *Валера, Серёжа и Дима получили за три контрольные работы каждый по три оценки, причём все оценки оказались тройками, четверками или пятёрками. Валера сказал: «У меня за две контрольные оценки больше, чем у Серёжи». Серёжа ответил: «Зато у меня за две контрольные оценки выше, чем у Димы». Дима парировал: «А я две контрольные написал лучше, чем Валера». Могли ли все мальчики говорить правду? Ответ обоснуйте.*

Решение: Если у Валеры были оценки 5, 4, 3 у Серёжи — 4, 3, 5, а у Димы — 3, 5, 4, то все мальчики сказали правду: Валера лучше Серёжи написал 1-ю и 2-ю контрольную, Серёжа лучше Димы 1-ю и 3-ю, а Дима лучше Валеры 2-ю и 3-ю.

Примечание: Приведённый вариант единственен с точностью до перестановки номеров контрольных работ; школьники, конечно, этого доказывать не должны.

Ответ: Могли.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Пример, показывающий, что все трое правы	7 баллов
Ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов

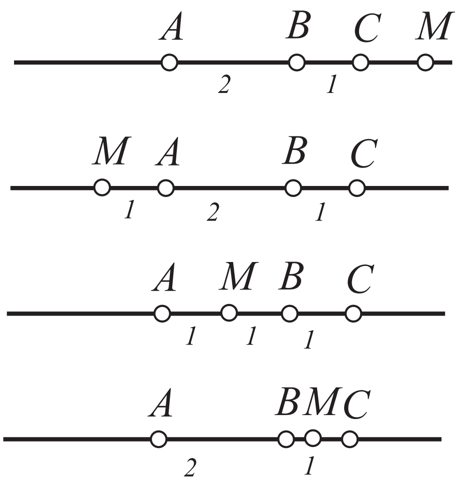
7.4. *У Кати волосы растут вдвое быстрей, чем она сама, а у Алёны, которая растёт со скоростью волос Кати, — в полтора раза быстрее, чем растёт Алёна. В настоящий момент у Алёны и у Кати одинаковая высота волос над полом. Чьи волосы раньше достигнут пола? Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть Катя выросла на x см. Тогда её волосы выросли на $2x$ см и расстояние от них до пола уменьшилось на $2x - x = x$ см. За это время Алёна выросла на $2x$ см, её волосы — на $3x$ см, и расстояние от них до пола уменьшилось на $3x - 2x = x$ см. Вывод: волосы Алёны и Кати достигнут пола одновременно.

Ответ: Одновременно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Ответ без обоснования	0 баллов



К решению задачи 7.5

7.5. *Точка B лежит на отрезке AC, $AB = 2$, $BC = 1$. Укажите на прямой AC все точки M, для которых $AM + MB = CM$, и покажите, что других точек M с таким свойством нет.*

Решение:

Способ 1. В зависимости от положения точки M на прямой AC возникают 4 случая.

Случай 1. Точка M лежит вне отрезка AC со стороны точки C. Тогда равенство невозможно, так как $AM > CM$.

Случай 2. Точка M лежит вне отрезка AC со стороны точки A. Тогда

$$CM = AM + AB + BC = MB + BC.$$

Для выполнения равенства необходимо и достаточно, чтобы $AM = BC$. Значит, M лежит вне отрезка AC со стороны A и отстоит от A на треть отрезка AC.

Случай 3. Точка M лежит на отрезке AB. Тогда $AM + MB = AB$, поэтому для выполнения равенства необходимо, чтобы $MC = AB$. Это возможно тогда и только тогда, когда M — середина AB.

Случай 4. Точка M лежит на отрезке BC. Тогда равенство невозможно, так как $AM > AB > BC > MC$.

Способ 2. Рассмотрим координатную ось. Возьмём в качестве начала координат точку A и направим ось вдоль луча AC. Тогда координаты точек A, B, C равны 0, 2 и 3 соответственно. Пусть x — координата точки M. Условие задачи определяется равенством $|x| + |x - 2| = |x - 3|$. Решая это уравнение (либо графически, либо рассматривая промежутки), находим два его корня: $x = 1$ и $x = -1$. Этим корням и соответствуют два возможных положения точки M.

Ответ: Таких точек две: середина отрезка AB и точка, лежащая на расстоянии 1 влево от точки A.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Задача верно сведена к решению уравнения с модулем, и это уравнение верно решено на некоторых, но не на всех промежутках	5 баллов
Верно разобраны три случая из четырёх, указанных в решении выше ИЛИ задача верно сведена к решению уравнения с модулем, которое не решено ни на одном промежутке	3 балла
Верно разобраны два случая из четырёх, указанных в решении выше	2 балла
Верно разобран один случая из четырёх, указанных в решении выше ИЛИ указаны (без обоснования) обе возможные точки M	1 балл
Указана (без обоснования) одна из возможных точек	0 баллов