Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019 – 2020 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. **+79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019 – 2020 учебном году
10 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

10.1. *В конкурсе, в котором участвовало 5 человек, было несколько вопросов. На каждый вопрос один из участников дал неправильный ответ, а остальные — правильные. Число правильных ответов у Пети равно 10 — это меньше, чем у любого другого. Число правильных ответов у Васи равно 13 — это больше, чем у любого другого. Сколько вопросов было в конкурсе? Ответ обоснуйте.*

Решение: На каждый вопрос было четыре верных ответа, значит, общее число верных ответов кратно четырём. Наибольшее количество верных ответов равно $13 + 3 \cdot 12 + 10 = 59$, наименьшее — $13 + 3 \cdot 11 + 10 = 56$. В промежутке от 56 до 59 есть только одно число, кратное 4: число 56. Значит, всего вопросов было $56 : 4 = 14$. Ситуация, когда вопросов ровно 14 возможна. Например, Вася неверно ответил только на первый вопрос, Петя — на второй, третий, четвёртый и пятый, и каждый из трёх оставшихся мальчиков — на три «своих» вопроса (скажем один — на вопросы № 6 — 8, второй — № 9 — 11 и третий — № 12 — 14).

Ответ: 14 вопросов.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Не обосновано, что описанная в задаче ситуация возможна	баллы не снижать
При переборном решении разобраны не все случаи, но верный ответ и пример получены	3 балла
Установлены либо границы возможного количества верных ответов, (числа 56 и 59) либо делимость количества верных ответов на 4	2 балла
Приведён верный пример (и дан верный ответ), единственность ответа не обоснована	1 балл
Ответ без обоснования	0 баллов

10.2. *Можно ли в выражении* $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \frac{1}{5} * \frac{1}{6} * \frac{1}{7} * \frac{1}{8}$ *вместо знаков* $*$ *так расставить знаки плюс и минус, чтобы модуль этого выражения стал меньше* $\frac{1}{500}$*?*

Решение: Наименьшее общее кратное всех чисел знаменателя равно 840. Если в числителе после приведения к этому общему знаменателю всех дробей получится 0, -1 или 1, то ответ положительный; иначе отрицательный. Числители дробей после приведения равны 420, 280, 210, 168, 140, 120 и 105. Последней цифрой их суммы (с учётом знаков чисел) будет 3 или 7. Значит, так расставить знаки нельзя.

Ответ: Нельзя.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что после приведения к общему знаменателю числитель полученной дроби будет нечётен (или не равен 0)	3 балла
Доказано, что после приведения к общему знаменателю в задаче требуется получить несократимую дробь с числителем, не превосходящим по модулю числа 1	1 балл
Неверный ответ или верный ответ без обоснования, возможно, проиллюстрированный несколькими примерами	0 баллов

10.3. *Докажите, что при любом натуральном числе n и при любом действительном α имеет место двойное неравенство*

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{n+\sin^2\alpha} + \frac{1}{n+2\sin^2\alpha} + \ldots + \frac{1}{n+(2n+1)\sin^2\alpha} \leqslant 3.$$

Решение: Пусть $t = \sin^2\alpha$ (t — параметр, принимающий значение из отрезка $[0;\,1]$). Требуется доказать, что

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{n+t} + \frac{1}{n+2t} + \ldots + \frac{1}{n+(2n+1)t} \leqslant 3.$$

Каждая из дробей оцениваемой суммы тем больше, чем меньше её знаменатель, поэтому

$$\frac{1}{n+t} + \frac{1}{n+2t} + \ldots + \frac{1}{n+(2n+1)t} \leqslant \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{2n+1} =$$

$$= \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} \leqslant 2+1 = 3.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{n+t} + \frac{1}{n+2t} + \ldots + \frac{1}{n+(2n+1)t} \geqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+(2n+1)} \geqslant$$

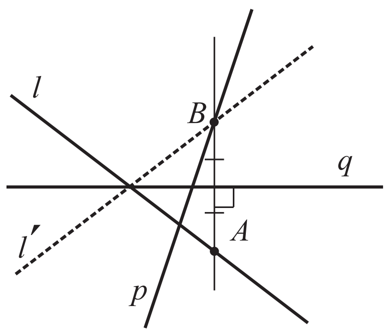
$$\geqslant \underbrace{\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+1}+\ldots+\frac{1}{3n+1}}_{2n+1}=\frac{2n+1}{3n+1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3(3n+1)}>\frac{2}{3}.$$

Ещё заметим, что оценка 3 достигается (при $n=1$, $\alpha=0$), а оценка $\frac{2}{3}$ — нет.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Доказано только одно из двух неравенств, либо $\leqslant 3$, либо $>\frac{2}{3}$	3 балла
Осуществлена замена $t=\sin^2\alpha$; других продвижений в решении нет	1 балл
Любые выкладки, из которых ход решения не просматривается, а также более грубые оценки, чем требуется	0 баллов

10.4. *На плоскости проведены три попарно пересекающиеся прямые: l, p, q. С помощью циркуля и линейки постройте на прямых l и p соответственно точки A и B так, чтобы отрезок AB был перпендикулярен прямой q и делился этой прямой пополам. Определите, сколько решений имеет задача в зависимости от взаимного расположения прямых l, p, q?*



К решению задачи 10.4

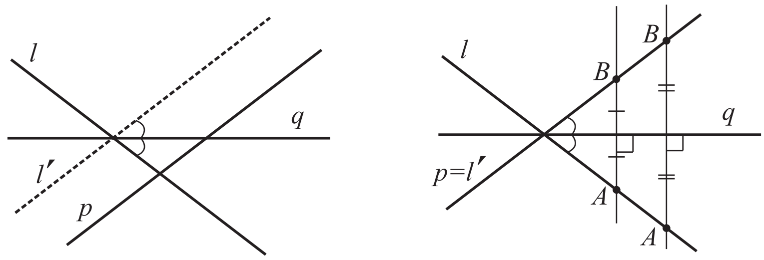
Решение:

Анализ. Пусть такие точки найдены. Тогда при осевой симметрии относительно прямой q они переходят друг в друга. При этом точка A лежит на прямой l, поэтому точка B обязана лежать на прямой l' — образе прямой l при указанной симметрии. Кроме того, B лежит на прямой p. Значит, B — точка пересечения прямых l' и p — см. рисунок. (Аналогично, A — точка пересечения прямых p' и l.)

Построение. Отобразим прямую l симметрично прямой q. Получим прямую l'. B — точка пересечения прямых p и l'. Точка A — точка пересечения прямой l и прямой, проходящей через точку B перпендикулярно прямой q.

Доказательство. По построению точка B лежит на прямой p, а прямая AB перпендикулярна прямой q. В силу того, что $B \in l'$, а прямая l' симметрична прямой l относительно q, образ точки B при этой симметрии лежит на прямой l. Кроме того, он лежит на прямой AB. Значит, точка A и является этим образом. Тогда прямая q — серединный перпендикуляр к отрезку AB, поэтому отрезок AB перпендикулярен прямой q и делится этой прямой пополам.

Исследование. Все указанные построения возможны, если только точка B найдётся. При этом для каждой полученной точки B точка A определяется однозначно. Точка B единственна (и тогда задача имеет единственное решение), если прямые l' и p не параллельны. Если же они параллельны, то решений нет, исключая тот случай, когда прямая l' совпадёт с прямой p — тогда решений бесконечно много (в качестве B подойдёт любая точка прямой p). Параллельность означает, что прямая q параллельна биссектрисе угла, образованного прямыми l и p, совпадение — что прямая q сама является этой биссектрисой.



К решению задачи 10.4. *Слева* — решений нет, *справа* — бесконечно много решений

Ответ: Если прямая q является биссектрисой угла, образованного прямыми l и p, то решений бесконечно много; если она параллельна биссектрисе, но не совпадает с ней — решений нет. Иначе решение единственно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное обоснованное построение и верное исследование	7 баллов
И построение, и исследование есть, но доказательство того, что построение приводит к нужному отрезку не полно или отсутствует	6 баллов
Верное обоснованное построение, но анализ не проведён (упущен хотя бы один из случаев: решений нет или их бесконечно много)	5 баллов
Имеется идея рассмотреть симметрию относительно прямой q; при этом построение точек не сделано	2 балла
Верно исследованы частные случаи, когда решений нет, или когда их бесконечно много	по 1 баллу за случай
Всевозможные замечания о исследуемой конструкции, которые к решению не привели	0 баллов

10.5. *Пусть* $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$. *Найдите все значения, которые может принимать число* $x+y$, *и докажите, что других значений быть не может.*

Решение: Рассмотрим функцию $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$. Так как при любом действительном x выполнено $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant -x$, эта функция всюду положительна. Пусть $a > 0$. Решая уравнение $f(x) = a$, находим, что значение a функция принимает в единственной точке $x = \dfrac{a^2-1}{2a}$. Наше уравнение имеет вид $f(x)f(y) = 1$. Значит, если $f(x) = a$, то $f(y) = 1/a$. Тогда $x = \dfrac{a^2-1}{2a}$, $y = \dfrac{\dfrac{1}{a^2}-1}{2\cdot\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1-a^2}{2a}$. Отсюда $x+y=0$.

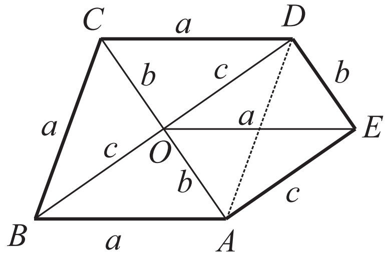
Ответ: 0.

Примечание: У задачи есть и другие решения, в том числе связанные с тригонометрической заменой $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения в преобразованиях допущены ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	4 балла
Идея рассмотрения функции $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, не доведённая до решения задачи	2 балла
Верный ответ, подкреплённый верными примерами (в любом количестве), но не доказанный в общем случае	1 балл
Верный ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов

10.6. *Точку внутри выпуклого пятиугольника соединили с его вершинами, в результате чего пятиугольник оказался разбитым на 5 равных между собой неравнобедренных треугольников. Докажите, что эти треугольники прямоугольные.*



К решению задачи 10.6

Решение: Пусть пятиугольник обозначен буквами $ABCDE$, а внутри выбрали точку O. Обозначим стороны получившихся треугольников через a, b, c, а противолежащие им углы (в градусах) через α, β и γ. Для каждого из пяти треугольников AOB, BOC, COD, DOE и EOA запишем на сторонах их длины. Так как отрезки OA, OB, OC, OD и OE входят в два треугольника каждый, на них будет записано по две одинаковые буквы, а так как каждая из букв a, b, c записана нечётное число раз (именно 5), то и на отрезках периметра пятиугольника каждая из этих букв встретится нечётное число раз. Это возможно только если одна из букв (пусть a) встречается трижды, а две остальные — по одному разу. Тогда среди углов AOB, BOC, COD, DOE и EOA ровно три угла

α, один угол β и один угол γ. Имеем $3\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$. Так как $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ (как сумма углов любого треугольника), получаем $2\alpha=180^\circ$ или $\alpha=90^\circ$, что и означает прямоугольность каждого из треугольников AOB, BOC, COD, DOE и EOA.

Для полноты решения следует показать, что ситуация, описанная в задаче, возможна. Пример. Рассмотрим ромб $ABCD$, отличный от квадрата. Пусть O — точка пересечения его диагоналей, а точка E симметрична точке O относительно середины стороны DA. Легко проверить, что треугольники AOB, BOC, COD, DOE и EOA равны, то есть условие задачи выполнено.

Примечание: Из приведённого решения несложно увидеть, что построенный пример — единственно возможный (с точностью до линейных размеров сторон и острого угла ромба). Поэтому можно, например, выразить все углы такого пятиугольника через его наименьший угол φ. Они будут равными φ, $180^\circ-\varphi$, $90^\circ+\dfrac{\varphi}{2}$, $180^\circ-\dfrac{\varphi}{2}$, 90°.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство и пример пятиугольника и точки	7 баллов
Верное доказательство, но пример отсутствует	6 баллов
Доказано, что из пяти сторон пятиугольниа три равны, а две другие различны	3 балла
Приведён пример пятиугольника и точки внутри него, реализующие условие задачи	1 балл